

MATRİSLER

Çok kolay öğrenebileceğiniz bir konu.

Ama hiç çalışmayanlar için kolay konu yok tabii ki! Matris, satır ve sütunlardan oluşan bir tablo. Ama aynı reel sayılardaki gibi burada da toplama, çıkarma, çarpma, tersini bulma gibi şeyler var.

Başlarken bir iki matris yazarak merakınızı giderip öyle devam edeyim.

Meselâ 2 satır ve 3 sütundan oluşan bir A matrisi yazayım.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Bir de 3 satır ve 2 sütundan oluşan bir B matrisi.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Matris, üstte gösterdiğim gibi sayılardan oluşan böyle bir tablo işte.

Ama tablodaki (matristeki) her elemanın yerini gösteren bir adresi var.

Örneğin,

A matrisinin 2. satırı ve 3. sütununun kesiştiği yerdeki eleman a_{23} ile,

1. satırı ile 2. sütununun kesiştiği yerdeki eleman a_{12} ile gösterilir.

Bu söylediklerimi daha genel ifade edeyim. m tane satır ve n tane sütundan oluşan bir A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Biçiminde gösterilir. Ve bu matrise m x n türünde (m x n boyutlu) bir matris denir.

Burada, m satır sayısı n ise sütun sayısıdır.

a_{ij} elemanı i. satır ve j. sütunun kesişimindeki eleman demektir. (o elemanın adresi diye düşünebilirsiniz bunu)

Örnek Soru

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a_{12} + a_{31}$ toplamı kaçtır?

Çözüm.☺

Çözmeye bile gerek yok bence.☺

Her şey verilmiş zaten. Sadece bakmak ve görmek lâzım!

a_{12} ; birinci satır ile ikinci sütunun kesiştiği yerdeki eleman demektir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 1. \text{ satır} \\ \rightarrow 2. \text{ satır} \\ \rightarrow 3. \text{ satır} \\ \downarrow \\ 2. \text{ sütun} \end{array}$$

Yani, $a_{12} = 3$ tür.

Aynı şekilde a_{31} ; üçüncü satır ile birinci sütunun kesiştiği yerdeki eleman demektir. Yani, $a_{31} = 1$ dir.

Demek ki $a_{12} + a_{31} = 3 + 1 = 4$ imiş.

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

olduğuna göre, $a_{32} + a_{12} \cdot a_{21}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

olduğuna göre, $a_{21} + a_{13} + a_{23}$ toplamının sonucu kaçtır?

Yapabileceğinize de inansanız, haklı çıkarsınız.

Henry Ford

$$3. \quad B = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $b_{21} \cdot b_{32}$ çarpımının sonucu kaçtır?

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 9 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a_{11} + a_{32} \cdot a_{41}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ x & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinde $a_{13} + 3 \cdot a_{21} - a_{23} = 4$ olduğuna göre, x kaçtır?

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & x \\ x & -2 & y \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

matrisinde $a_{13} - a_{21} + a_{23} + a_{32} + a_{33} = 0$ olduğuna göre, y kaçtır?

✓ Bütün elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir. 0 ile gösterilir.

Örneğin, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ birer sıfır matrisidir.

✓ Satır ve sütun sayıları eşit olan matrise **kare matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bu matriste a_{11} , a_{22} , a_{33} elemanları **esas köşegen** üzerindeki elemanlardır.

✓ Esas (asal) köşegen elemanları 1, diğer bütün elemanları 0 "sıfır" olan kare matrise **birim matris** denir ve I ile gösterilir.

$$I_1 = [1]$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şu da lüzum olacak. Aklınızda ola☺
Birim matrisin tüm kuvvetleri de yine birim matristir.

Bir Matrisin Transpozesi (Devriği)

Bir matrisin satırlarının sütun, sütunlarının da satır haline getirilmesiyle elde edilen matrise bu matrisin transpozesi (devriği) denir. Ve A^T veya A^d ile gösterilir.

Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ise $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dir.

Yani, bir matrisin transpozmesini bulurken birinci satır birinci sütun oluyor. İkinci satır da ikinci sütun...

İlerde daha detaylı bahsetcez. Ama şimdilik bu kadarını ve bir iki özelliğini bilin yeterli.☺

$$\bullet (A^T)^T = A$$

$$\bullet (A+B)^T = A^T + B^T$$

1. A, bir sıfır matrisidir.

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & y+2 \\ z-5 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

2. A, bir sıfır matrisidir.

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & y-2 \\ t-4 & z-3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y + z + t$ toplamı kaçtır?

3. A, bir kare matristir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamı kaçtır?

4. A, bir kare matristir.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Buna göre A matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamı kaçtır?

5. I_1 , birim matristir.

$$I_1 = [3a - 14]_{1 \times 1}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

6. I_2 , birim matristir.

$$I_2 = \begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ 0 & y-2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

7. I_3 , birim matristir.

$$I_3 = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & b-4 & 0 \\ 0 & d-1 & c+2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a.b - c.d$ işleminin sonucu kaçtır?

8. Aşağıdaki matrislerin transpozisini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliği

Matrislerdeki en önemli yerlerden biri bu. Ve çok basit. ©

Boyutları aynı ve karşılıklı elemanları eşit olan matrisler eşittir. Kısacası adresi aynı olan elemanların eşit olması lâzım.

9. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a + d$ toplamı kaçtır?

10. $\begin{bmatrix} 2x+3 & -5 \\ y-2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

11. $\begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ y+1 & z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

12. $A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -3 & b-3 & 0 \\ 3 & a+2 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} c+5 & -5 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & d-2 \end{bmatrix}$$

$A = B$ olduğuna göre, $a.b.c.d$ çarpımı kaçtır?

1. $\begin{bmatrix} 2 & x+1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ y+2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $x.y$ çarpımı kaçtır?

2. $\begin{bmatrix} 2x & -2 \\ 3y+1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & t-2 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $x + y + z + t$ toplamı kaçtır?

3. $\begin{bmatrix} |x-2| & 5 \\ y^3 & 3^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 27 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı en az kaçtır?

4. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & a \\ b+3 & c-2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2a+b \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, $a.c$ çarpımı kaçtır?

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 4 & 2^a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{y} \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

olmak üzere, $A = B$ olduğuna göre, $a.x$ çarpımı kaçtır?

6. $A = \begin{bmatrix} 2a+3 & d+1 \\ b & c-2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$A = B^T$ olduğuna göre, $a + b + c + d$ toplamı kaçtır?

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -y+6 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = B^T$ olduğuna göre, $x + y + z + t$ toplamı kaçtır?

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} a+1 & b+2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} -3 & c+5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$A = B$ olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı kaçtır?

$$9. \quad X = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -5 \\ -5 & a-b \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} a+b & 3 & -5 & 1 \\ 6 & -5 & 7 & c \end{bmatrix}$$

$X = Y^T$ olduğuna göre, $a.b.c$ çarpımı kaçtır?

Matrislerde toplama- çıkarma işlemi

A ve B aynı boyutlu değilse toplama filan yapılmaz zaten. Genel olarak A ve B matrislerini toplarken A ve B matrislerinin aynı adresli elemanları toplanır.

Başka da bir şeyi yok☹

Çıkarırken de aynı mantıkla işlem yapılır.

Şunu inceleyin bakalım.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 & -2-4 \\ 2-1 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Şimdi anladınız mı ne demek istediğimi?

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A + B$ matrisi nedir?

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a.b - x.y$ işleminin sonucu kaçtır?

Bir Matrisi Bir Sayı ile Çarpma

Bir matrisi bir sayı ile çarparken o matrisin bütün elemanları o sayı ile tek tek çarpılır. Biraz uzun gibi. Ama başka yolu da yok benim bildiğim.☹

Demek istediğim şeyi şöyle örneklendireyim.

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 & 2.1 \\ 2.(-2) & 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Başka örneğe gerek yok di mi?

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $2.A$ matrisini bulunuz.

$$2. \quad X = \begin{bmatrix} -15 & -6 \\ 0 & 12 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\frac{-1}{3} \cdot X$ matrisini bulunuz.

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ -3 & y+2 \end{bmatrix}$$

$3A = B$ olduğuna göre, $x + y$ toplamı kaçtır?

$$4. \quad \begin{bmatrix} x+1 & -5 & 3 \\ -2 & y+1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -10 & 6 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x.y$ çarpımı kaçtır?

$$5. \quad 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

işleminin sonucu nedir?

$$6. \quad 3 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

işleminin sonucu nedir?

❖ MATRİS DETERMİNANT

4. ANTRENMAN

7.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $3A^T + B$ toplamının sonucu nedir?

8. x, y, z birer pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ 2 & y^2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ z-3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 18 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y + z$ toplamı kaçtır?

9.
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

işleminin sonucu nedir?

10.
$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $2A - 3B$ farkı neye eşittir?

11.
$$x \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

12.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 6 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A - 3B^T$ işleminin sonucu nedir?

❖ MATRİS VE DETERMİNANT

5. ANTRENMAN

1. I birim matris ve

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = 3A + 2I$$

olduğuna göre, B matrisinin eşiti nedir?

2.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = 4A^T + 3I$$

olduğuna göre, B matrisinin eşiti nedir?

3.
$$2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2 & 3z-1 \\ y+3 & t+2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $x + y + z + t$ toplamı kaçtır?

4.
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A matrisinin eşiti nedir?

5.
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, B matrisi nedir?

6.
$$A + 2B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A matrisinin eşiti nedir?

Matrislerde Çarpma İşlemi

Ben hiçbir şey anlatmadan siz önce aşağıda A.B çarpım matrisini nasıl bulduğumu inceleyin bakalım.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1$ $2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2$
 $(-1) \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$ $(-1) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 2$

Anladınız mı ne yaptığımı?

Anlamayanlar için izah edeyim.

A.B çarpımı bulunurken,

A'nın birinci satırı ile B'nin birinci sütununun elemanları çarpılıp toplanarak çarpımın birinci satır birinci sütun elemanı bulunur.

A'nın birinci satırı ile B'nin ikinci sütununun elemanları çarpılıp toplanarak çarpımın birinci satır ikinci sütun elemanı bulunur.

Böyle devam ediyor işte. Yazması biraz uzun da. ©

İki matrisin çarpılabilmesinin de bir şartı var tabii ki. A.B işleminin yapılabilmesi için A'nın sütun sayısı ile B'nin satır sayısı eşit olmalı.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$c_{23} \in A.B$ ise, bu eleman A matrisinin 2. satırı ile B matrisinin 3. sütununun elemanlarının karşılıklı çarpımlarının toplamından elde edilmiştir.

Tabii bunda biraz amelelik var ama olsun... Sizin de başka işiniz olmadığına göre... ©

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

$$8. \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A.B çarpımının sonucu nedir?

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A.B matrisinin eşiti nedir?

$$2. \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, a + b + c + d toplamı kaçtır?

$$3. \quad \begin{bmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

$$4. \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . \\ a & . & . \\ . & b & . \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

$$5. \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . & . \\ . & b & . \\ d & . & c \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, a.b + c.d toplamı kaçtır?

$$6. \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 16 \\ 8 & 9 & 28 \\ 8 & x+12 & 40 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x kaçtır?

$$7. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \cdot & \cdot \\ \cdot & n & \cdot \\ \cdot & \cdot & p \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $m + n + p$ toplamı kaçtır?

$$8. [2 \ x \ 5] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [13]$$

olduğuna göre, x kaçtır?

$$9. [1 \ a \ 4 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 29,$$

olduğuna göre, a kaçtır?

$$10. X = \begin{bmatrix} \log_3 4 \\ \log_4 5 \end{bmatrix}$$

$$Y = [\log_2 3 \ \log_{25} 4]$$

olduğuna göre, $Y \cdot X$ çarpımının sonucu nedir?

$$11. i^2 = -1 \text{ olmak üzere,}$$

$$A = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A \cdot B$ matrisinin elemanları toplamı nedir?

$$12. A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ veriliyor.}$$

$A \cdot C = 2C + B$ olduğuna göre, C matrisi nedir?

Aktınızda olsun. $A \cdot B \neq B \cdot A$ dir. Anlayacağınız matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

Kare Matrisin Kuvvetleri

2×2 boyutlu iki matrisi çarpabiliyorsanız burada sıkıntı yaşamayacaksınız.

Bir kare matrisin kuvvetlerini hesaplarken modüler aritmetiktekinе benzer mantıkla ilk önce verilen matrisin sırayla 2, 3, 4, ... kuvvetini alın. Kuvvetini alın. Ama her kuvvetten sonra bulduğunuz sonuçları dikkatle inceleyin ve bir kural bulmaya çalışın. Bir şeyler bulursunuz herhalde! Sonra da bu kurala göre genelleme yapın.

Örnek Soru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{44} ün eşiti nedir?

Çözüm

Bu şekildeki sorularda A matrisinin sırasıyla ikinci, üçüncü, dördüncü, ... kuvvetini alın ve bir kural bulmaya çalışın. Genelde ikinci veya üçüncü kuvvetini alınca kuralı görürsünüz. İyi bakarsanız tabii ki!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

A nın karesinde işe yarar bi şey yok gibi. Üçüncü kuvvetine bakalım.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Buna dikkatli bakın bakalım bir şey görebilecek misiniz?

Söyleyeyim. Dikkatli bakarsanız

$$A^3 = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -8I \text{ olduğunu görebilirsiniz.}$$

Şimdi A^{44} ü A^3 ü kullanarak ifade edin.

Bunu $A^{44} = (A^3)^{14} \cdot A^2$ olarak düşünürseniz sonucu

$A^{44} = (-8I)^{14} \cdot A^2$ olarak ve de birim matrisin kuvvetlerinin yine birim matris olduğunu unutmazsanız

$$(-8)^{14} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = 2^{42} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \text{ olarak bulabilirsiniz.}$$

Hatta bunu $-2^{43} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ şeklinde de ifade edebilirsiniz.

Biraz uzun oldu. Ama idare edin artık

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^2 matrisi nedir?

$$2. A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^3 ün eşiti nedir?

$$3. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^3 matrisini eşiti nedir?

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinde $a + b = c + d = 8$ olduğuna göre, A^2 matrisinin birinci satır elemanlarının toplamı kaçtır?

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{27} matrisi nedir?

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{28} matrisi nedir?

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{2012} matrisi nedir?

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{2012} matrisi nedir?

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{2012} matrisi nedir?

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{61} matrisi nedir?

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{15} matrisi nedir?

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{2014} matrisi nedir?

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{1967} matrisi nedir?

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{47} matrisi nedir?

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, A^{45} in eşiti nedir?

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
 $B = A^2 + 3A + I$
 olduğuna göre, **B** matrisi nedir?

8. $X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
 $Y = 2X^2 - X + 3I$
 olduğuna göre, **Y** matrisi nedir?

9. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
 $B = A^3 - 2A - 4I$
 olduğuna göre, **B** matrisi nedir?

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ veriliyor.
 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ olduğuna göre, **f(A)** değeri nedir?

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ veriliyor.
 $f(x) = x^2 + x + I$ olduğuna göre, **f(A)** değeri nedir?

12. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ veriliyor.
 $f(x) = x^3 + x^2$ olduğuna göre, **f(A)** değeri nedir?

Bir Matrisin Çarpma İşlemine Göre Tersi

Kare matrislerin tersi bulunabiliyor. Hepsinin olmasa bile çoğunun tersi var. Göreceksiniz☺

Daha çok 2×2 boyutlu matrislerin tersi lâzım olacak size. Ve bu da kolay zaten.

Pırt olarak 2×2 türündeki bir matrisin tersini şu şekilde bulabilirsiniz. (En azından bunu öğrenin☺)
 Zaten daha yüksek mertebeden olanların tersiyle uğraşmak tam bir işkence.☹

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ise } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Yani, a ve d nin yerleri, b ve c nin de işaretleri değişiyor. Ve burada bir de şunu fark etmiş olmanız lâzım; **a.d - b.c = 0** olursa bu matrisin tersi olmaz.

Matrisin tersiyle ilgili olarak bilmeniz gereken ilk şey matrisin tersini bulabilmek olmalı. İkincisi de bir matris ile tersinin çarpımının birim matris olduğu.

Yani, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ olduğu.

Örnek Soru

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, **A.X = B** eşitliğini sağlayan **X** matrisi nedir?

Çözüm☺

İlk önce X i nasıl bulabileceğinizi düşünün.

$A.X = B$ eşitliğindeki X i bulmak için eşitliğin sol tarafındaki A yı yok etmek lâzım. (Eşitliğin diğer tarafına bölüm olarak geçmiyor tabii ki☺) Şunu bilerseniz mantık yürütmeniz daha kolay. Bir matrisi ancak tersiyle çarparak etkisiz hale getirebilirsiniz. Bunun için eşitliğin her iki yanını A nın tersiyle çarpın. Fakat dikkat edin. A nın tersiyle A yan yana olmalı ki X yalnız kalsın. Yani, demek istediğim şu: $\frac{A^{-1} \cdot A \cdot X}{\text{Birim matris}} = A^{-1} \cdot B$

den $X = A^{-1} \cdot B$ olur.

Şimdi önce A nın tersini bulun. Formüle göre yapın ve şunu bulun.

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Bulduğunuz bu matrisle B yi çarpın şimdi de.

$$X = A^{-1} \cdot B \text{ idi.}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Anlaşılmayan bi yer?

Geçtim☺

Şunlar işinize yarayabilir. Belleğin☺

$$X \cdot A = B \text{ ise } X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \text{ den } X = B \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot X = B \text{ ise } A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ den } X = A^{-1} \cdot B \text{ olduğunu çıkarabilmek gerek.}$$

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, **A** matrisinin tersi nedir?

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, **A** matrisinin tersi nedir?

3. $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

olduğuna göre, **A⁻¹** matrisi nedir?

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

$$5. \quad X = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & n \\ m & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A^{-1} \cdot B$ çarpımının eşiti nedir?

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A^{-1} \cdot B^T$ matrisi nedir?

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $A^T \cdot B^{-1}$ matrisi nedir?

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A^{-1} \cdot X = B$ eşitliğini sağlayan X matrisi nedir?

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot X = B$ olduğuna göre, X matrisi nedir?

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $C \cdot A = B$ eşitliğini sağlayan C matrisi nedir?

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A \cdot X = B^T$ olduğuna göre, X matrisi nedir?

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A \cdot X = B$ olduğuna göre, X matrisi nedir?

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $B \cdot A = A^T$ olduğuna göre, B matrisi nedir?

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$C \cdot A^{-1} = B$ olduğuna göre, $a + b + c + d$ toplamı kaçtır?

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$B \cdot C^{-1} = A$ olduğuna göre, $x \cdot y + z - t$ kaçtır?

Hatırlayın. Ne zaman bir matrisin tersi olmuyordu?

8.

$$A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi olmaması için x kaç olmalıdır?

9.

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ a+2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi olmadığına göre, a kaçtır?

DETERMİNANTLAR

Determinant çok daha kolay.
A matrisinin determinanı $|A|$ veya $\det(A)$ ile gösteriliyor.

Tabii ki $|A|$ 'nın mutlak değerle bir ilgisi yok. Karıştırmayalım lütfen☺

Şimdi size 1×1 , 2×2 ve 3×3 türündeki matrislerin determinantını nasıl bulcazını göstereyim.

Acayip kolay☺

İlk önce 1×1 türündeki.

$$A = [5] \text{ ise } |A| = 5$$

$$A = [-3] \text{ ise } |A| = -3$$

$$A = [x] \text{ ise } |A| = x \text{ tir.}$$

Gördüğünüz üzere çok kolay☺

Gelelim 2×2 boyutlu matrisin determinantına.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ise } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ dir.}$$

Örneğin,

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14 \text{ tür.}$$

Örnek Soru

$$\begin{vmatrix} \log_2 9 & 5 \\ 2 & \log_3 8 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

Çözelim☺

Determinant sorularının çoğunda sorular acayip kolay. Göreceksiniz zaten☺

Eğer birazcık zorluğu olacaksa da bilin ki bu determinantla ilgi değil, önceki konularla ilgili bilgilerden kaynaklanıyor olabilir.

Mesela bu soruda birazcık logaritma bilmek lâzım.

Taban değiştirme olayı filan.

$$\begin{vmatrix} \log_2 9 & 5 \\ 2 & \log_3 8 \end{vmatrix} = \log_2 9 \cdot \log_3 8 - 5 \cdot 2 = 6 - 10 = -4$$

Şimdi "Nasıl bu kadar hızlı buldunuz?" gibi şey düşünüyorsanız.

El cevap: Tecrübe☺

Çalışınca sizinde olacak. Emin olun.

Sabırlı ve kararlı bi şekilde devam edin. Eninde sonunda açılacak o başarı kapısı. Yeter ki adam gibi is-temeyi bilin☺

$$1. \quad A = [-3]$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$4. \quad \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

toplamının değeri kaçtır?

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} a+3 & a \\ a & a-3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$6. \quad \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x & x-2 \\ x+2 & x \end{vmatrix}$$

toplamının değeri kaçtır?

$$7. \quad \det \begin{bmatrix} x+1 & 4 \\ x & 2 \end{bmatrix} = 16$$

olduğuna göre, x kaçtır?

$\sin^2 x + \cos^2 x$ toplamı kaçta eşitti? Hatırlıyor musunuz? Bu soruda lâzım da☺

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$9. A = \begin{bmatrix} \sin x + 1 & \cos x + 1 \\ 1 - \cos x & \sin x - 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$10. \begin{vmatrix} \tan \frac{\pi}{3} & -2 \\ 3 & \cot \frac{\pi}{3} \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

Logaritma biliyorsanız bu soruda da sıkıntınız olmaz©

$$11. \begin{vmatrix} 3 & \log_2 27 \\ \log_3 8 & -2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$12. \begin{vmatrix} \log_3 9 & \log_2 8 \\ \log_5 1 & 5 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$13. i^2 = -1 \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{vmatrix} i+1 & 3 \\ 2 & i-1 \end{vmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$14. \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 22$$

olduğuna göre, x kaçtır?

$$15. \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = -2$$

olduğuna göre, x in alabileceği değerler toplamı kaçtır?

$$16. \begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 2x-3 & 2x+1 \end{vmatrix} = 36$$

olduğuna göre, x kaçtır?

Meselâ şu soruda $2574 = a$ deyip diğerlerini de a türünden yazınca sonuç daha kolay çıkıyor©

$$1. \begin{vmatrix} 2575 & 2576 \\ 2574 & 2575 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$2. \begin{vmatrix} 999 & 1000 \\ 1001 & 1002 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$3. A = \begin{bmatrix} 2010 & 2012 \\ 2011 & 2013 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$4. \begin{bmatrix} a & b \\ c & x \end{bmatrix}$$

matrisinin elemanları 2 artırıldığında determinantı değişmediğine göre, x değeri nedir?

3×3 tipindeki bir determinantın değerini hesaplarken Sarrus kuralı denen (Galiba bu adam bulmuş bunu©) kuralı kullancaz. Ama zor değil kesinlikle. Ben bir örnek yapayım. Anlayacaksınız zaten.

Örnek Soru

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

Çözelim©

Şimdi aşağıda baktığınızda karmakarışık duran bir şey yapcam. Ama korkmayın. Çok basit bir şey© İnceleyin bakalım. Ne yaptığımı anlamayanlar için anlatcam yine de.

$$\begin{array}{r} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{l} 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 \\ 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 0 \\ (-2) \cdot 3 \cdot 3 = -18 \\ \hline T_{\text{sol}} = 4 + 0 - 18 = -14 \end{array} \\ \begin{array}{l} 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6 \\ (-2) \cdot (-1) \cdot 1 = 2 \\ 4 \cdot 3 \cdot 0 = 0 \\ \hline T_{\text{sağ}} = 6 + 2 + 0 = 8 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Determinantın değeri $8 - (-14) = 22$ dir.

Ne yaptığımı anlatayım.

3×3 tipinde bir determinantın değerini hesaplarken ilk önce birinci ve ikinci satırı üçüncü satırın altına aynen yazdım.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

İkinci olarak okların yönündeki sayıları çarptım. Ve sağ tarafın ve sol tarafın ayrı ayrı toplamlarını buldum.

$$\begin{array}{r} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{l} 4 \\ 0 \\ -18 \\ \hline -14 \end{array} \\ \begin{array}{l} 6 \\ 2 \\ 0 \\ \hline 8 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

Son olarak da sağ taraftaki toplamdan (8 den) sol taraftakini (-14 ü) çıkardım ve olayı bitirdim.© Artık bu determinantın değerinin $8 - (-14) = 22$ olduğunu bulursunuz herhalde. Var mı anlamadığınız bir yer? Her halükarda geçeceğim de. Nezaketten sorayım dedim©

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$6. \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$7. A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$8. A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$9. A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

10. $i^2 = -1$ olduğuna göre,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-2i & -1 \\ i & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix}$$

determinantının değeri nedir?

11. $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1 \\ 1 & -i & i \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A|$ kaçtır?

$$12. \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & 4 & 3 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = -16$$

olduğuna göre, x kaçtır?

Determinantla ilgili bir kaç özellik©

$$\bullet |A| = |A^T|$$

Bir matris ile transpozisinin determinantı eşittir.

$$1. A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^T|$ kaçtır?

$$2. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^T|$ kaçtır?

$$|A^n| = |A|^n \text{ dir.}$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^5|$ kaçtır?

$$4. A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^3|$ kaçtır?

$$5. A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^{-1}|$ kaçtır?

$$6. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A^{-1}|$ kaçtır?

- A ve B aynı boyutlu kare matris ise,

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A \cdot B|$ kaçtır?

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $|A \cdot B|$ kaçtır?

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\det(A \cdot B)$ kaçtır?

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = [1 \ 5]$$

olduğuna göre, $\det(A \cdot B)$ kaçtır?

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\det(A^2 - B^2)$ kaçtır?

- Kare matrisin herhangi iki satır ya da sütunu aynı ise ya da orantılıysa determinanti sıfırdır.

$$12. \quad \begin{vmatrix} 125 & 132 \\ 375 & 396 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$1. \quad \begin{vmatrix} 3 & 15 & 10 \\ 5 & 25 & 20 \\ 7 & 35 & 30 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

$$2. \quad \begin{vmatrix} 2 & 152 & 3 \\ 4 & 304 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- Kare matrisin herhangi bir satırındaki (veya sütunundaki) elemanlar başka bir satıra eklenip çıkarılabilir. Determinantın değeri değişmez. Hatta 2 katı, 3 katı, 4 katı... alınarak da eklenip çıkarılmasında bir sıkıntı olmaz. Determinant değeri aynı kalır. Değişmez.

Meselâ şunda ikinci satırdan birinci satırı olduğu gibi çıkarıp da yapmak daha hoş. Ya da uzun uzun çarpın. Siz bilirsiniz©

$$3. \quad \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 102 & 103 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantının değeri kaçtır?

- $n \times n$ boyutlu bir matrisin k katı alınırsa determinantın k^n katına çıkar.

4. A, 3×3 boyutlu kare matris olmak üzere,

$$|A| = 3$$

olduğuna göre, $|3 \cdot A|$ determinantının değeri kaçtır?

5. A, 2×2 boyutlu kare matris olmak üzere,

$$|A| = -5$$

olduğuna göre, $|2 \cdot A^T|$ determinantının değeri kaçtır?

6. A, 3×3 boyutlu kare matris olmak üzere,

$$|A| = 3$$

olduğuna göre, $|-2 \cdot A^T|$ determinantının değeri kaçtır?

7. A, 3×3 boyutlu kare matris olmak üzere,

$$|A| = 2$$

olduğuna göre, $|(A^{-1})^T|$ determinantının değeri kaçtır?

Minör ve Eş Çarpan (Kofaktör)

Çok lâzım olur mu bilmiyorum. Ama vereyim. Zor bi şey değil. Sınavda gelir de yapmasanız ayıp olur! A, kare matrisinin 2.satır ve 3.sütunu atıldıktan sonra geriye kalan matrisin determinantına a_{23} elemanının minörü denir ve M_{23} ile gösterilir.

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$ sayısına da a_{23} elemanının eş çarpanı (kofaktörü = işaretli minörü) denir.

Tabii ben burada a_{23} ü verdim. Diğer bütün elemanlar için de aynı mantığı kullanabilirsiniz.

Örnek Soru

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{23} elemanının minörü ve kofaktörü kaçtır?

Çözüm

a_{23} elemanının minörünü bulmak için 2. satırı ve 3. sütunu silin. Bakın bakalım geriye ne kaldı?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Geriye kalan $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı kaç

ise a_{23} elemanının minörü odur.

$$\text{Yani, } M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 \text{ dur.}$$

Bunu bulunca kofaktörü bulmak kolay.

$$a_{23} \text{ ün kofaktörü de } A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 9 \text{ dur.}$$

Böyle bi şey işte. Soru gelirse yaparsınız gari!

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{12} elemanının minörü kaçtır?

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{33} elemanının minörü kaçtır?

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{32} elemanının minörü kaçtır?

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{32} elemanının kofaktörü kaçtır?

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin a_{31} elemanının kofaktörü kaçtır?

Ek Matris

$$A = [a_{ij}]_{n \times n} \text{ olmak üzere, } A = [A_{ij}]^T \text{ matrisine } A$$

matrisinin ek matrisi denir ve $\text{Ek}(A)$ ile gösterilir. "Bu da nereden çıktı?" di mi?

Neyse... Şu kadarını bilin yeter.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ matrisinin ek matrisi, } \text{Ek}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin ek matrisi nedir?

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\text{ek}(A)$ nedir?

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\text{ek}(A)$ nedir?

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $\text{ek}(A)$ nedir?

Ek matris yardımıyla ters matrisin bulunması

A matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmak şartıyla,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Ek}(A)$$

Demek ki ek matris yardımıyla bir matrisin tersini bulurken hem matrisin determinantını hem de ek matrisi bulmak gerekiyormuş.

Ama dua edin de 3×3 boyutlu bir matrisin tersini sorasınlar! Sorarsalar bi soruyu da yapmayiverirsiniz. gari! Şaka şaka...

Bunu aslında bir şeyi görmemiz için verdim.

Bir matrisin tersinin olması için determinantı sıfırdan farklı olmalı. Bu önemli işte. Soruşlar bunu. Bir defacık. Ama olsun!

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & x \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi olmadığına göre, x kaçtır?

6. x in hangi değeri için,

$$\begin{bmatrix} x+2 & x-1 \\ x+3 & x+1 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi bulunamaz?

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi nedir?

8.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi nedir?

9.
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi nedir?

10.
$$A = \begin{bmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi nedir?

11.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi olmaması için x kaç olmalıdır?

12.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi olmaması için x kaç olmalıdır?

13.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & x \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisinin ters matrisi olmaması için x kaç olmalıdır?

Cevaplar

CEVAPLAR

8. Antrenman
Sayfa 361-362

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{7}{12}$
3. $\frac{5}{7}$
4. $\frac{43}{49}$
5. $\frac{1}{5}$
6. $\frac{1}{24}$
7. $\frac{7}{20}$

9. Antrenman
Sayfa 363-364

1. $\frac{13}{20}$
2. $\frac{27}{49}$
3. $\frac{31}{72}$
4. $\frac{3}{10}$
5. $\frac{15}{56}$
6. $\frac{4}{35}$
7. 12
8. $\frac{1}{6}$
9. $\frac{1}{5}$
10. $\frac{2}{3}$
11. $\frac{2}{5}$
12. $\frac{3}{4}$

MATRİS VE
DETERMINANT

1. Antrenman
Sayfa 367-368

1. 1
2. -2
3. 2
4. 24

2. Antrenman
Sayfa 369-370

1. 4
2. 10
3. 7
4. -4
5. 5
6. 7
7. 11
8. $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
9. 3
10. 16
11. 8
12. 72

3. Antrenman
Sayfa 371-372

1. 2
2. 2
3. 4
4. -3
5. 1
6. 1
7. 5
8. -8
9. 20
10. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
11. -3

4. Antrenman
Sayfa 373-374

1. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
3. 5
4. -12
5. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 5 & 18 \\ -12 & -1 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
8. 10
9. $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -7 & -13 & 2 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

11. 2

12. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -5 & -5 & 6 \\ -5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

5. Antrenman
Sayfa 375-376

1. $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
3. 8
4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} -12 \\ 27 \\ 3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 2 & -20 \\ -3 & 26 \end{bmatrix}$

6. Antrenman
Sayfa 377-378

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}$
2. 10
3. 1
4. 51
5. -17
6. 2
7. 14
8. 3
9. 5
10. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
11. 2+i

7. Antrenman
Sayfa 379 - 380

1. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -16 & 6 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. 64
5. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 1 & -4024 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Antrenman
Sayfa 381-382

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 244 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 3^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{bmatrix}$
3. 2^{2014}
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
5. A
6. 2^{45}
7. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 52 & 22 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 28 & 50 \end{bmatrix}$

9. Antrenman
Sayfa 383-384

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
4. $\frac{1}{3}$
5. 8
6. $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} -11 & -10 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

10. Antrenman
Sayfa 385-386

1. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -5 & -16 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$
6. -1
7. 126
8. 4
9. 4

11. Antrenman
Sayfa 387-388

1. -3
2. -2
3. -17
4. -17
5. -9
6. 7
7. -7
8. 1
9. -1

12. 10
13. -8
14. 6
15. 1
16. 3

12. Antrenman
Sayfa 389-390

1. 1
2. -2
3. -2
4. $b+c-a$
5. -4
6. -26
7. -10
8. -10
9. 5
10. $-2i$
11. -2
12. -8

13. Antrenman
Sayfa 391-392

1. 2
2. 14
3. 1
4. -8
5. $\frac{1}{68}$
6. $\frac{-1}{30}$
7. -16
8. -32
9. 70
10. 0
11. -18
12. 0

14. Antrenman
Sayfa 393-394

1. 0
2. 0
3. -612
4. 81
5. -20
6. -24
7. $\frac{1}{2}$
8. -3
9. 7
10. 0

15. Antrenman
Sayfa 395-396

1. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
5. 6
6. -5
7. $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} a & -a-1 \\ 1-a & a \end{bmatrix}$
11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{11}{2}$
13. 4