Bölüm 18

Matrisler

Matris, nesnelerin dikdörtgensel bir biçemde düzenlenmesidir. Matris içine konulan öğelere, matrisin öğeleri ya da bileşenleri diyeceğiz. Matrisler günlük yaşamda çok kullanılan varlıklardır. Örneğin, bir tren istasyonunda trenlerin hareket saatlerini gösteren tablo bir matristitr. Bir lokantada müşteriye sunulan yemek listesi bir matristir. Bir sınıf listesi bir matristir.

Bu kitapta bileşenleri gerçel sayılar olan matrisleri konu edineceğiz.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

matrisi 1×1 tipinden bir matristir. Tek bileşeni (öğe) 1 dir.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 8 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisinin 2 satırı ve 3 kolonu vardır. 2×3 tipinden bir matristir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin 3 satırı ve 3 kolonu vardır. 3×3 tipindendir.

Satır ve Kolon

Birden çok bileşeni olan matrislerde, yatay doğrultuda ve aynı hizada yer alan bileşenlerden oluşan kümeye *satır*, düşey doğtultuda ve aynı hizada yer alan bileşenlerden oluşan kümeye de *kolon* (sütun) denilir. Örneğin, iki satırı ve üç kolonu olan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisi 2×3 tipinde olan bir matristir. Birinci sıradaki bileşenleri $\{-1, 3, 7\}$ dir. Bunlardan oluşaşan küme matrisin birinci satırıdır. $\{2, -4, -3\}$ kümesi matrisin ikinci satırıdır.

$\{-1, 2\}$ kümesi matrisin birinci kolonu, $\{3, -4\}$ kümesi matrisin ikinci kolonu, $\{7, -3\}$ kümesi matrisin üçüncü kolonudur.

m, n doğal sayılar olmak üzere m satırı ve n kolonu olan matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçemindedir. Buna $m \times n$ tipi matris denilir. Bazen ( ) parantezi yerine [ ] parantezi de kullanılabilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin m satırı ve n kolonu vardır. Bu tür matrislere $m \times n$ tipindendir diyeceğiz, İleride matrisin her satırını ve her kolonunu birer *vektör* olarak inceleyeceğiz.

18.1 Matrisin Bileşenleri

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini oluşturan a_{ij} öğelerinin her birisi maatrisin bir bileşenidir. Bazen bunlara matrisin ögeleri de denilir. A matrisinin i-inci satırı ile j-inci kolonu içinde yer alan ögeyi $[A]_{ij}$ ya da a_{ij} simgesiyle göstereceğiz.

A matrisinin i-inci satırı ile j-inci kolonu içinde yer alan ögeye bileşenini $[A]_{ij}$ ya da a_{ij} simgesiyle göstereceğiz.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi için

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 5 \\ a_{21} = -3 & a_{22} = 3 & a_{23} = 6 \\ a_{31} = 7 & a_{32} = 5 & a_{33} = 2 \end{array}$$

olur.

18.2 Matris Türleri

Karesel Matris

Satır sayısı kolon sayısına eşit olan matrise karesel matris ya da kare matris denilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinden bir karesel matristir.

Sıfır Matris

Bütün bileşenleri 0 olan matrise *sıfır matris* denilir:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinden sıfır matristir.

Teorem 18.1.

1. Bir matrisin sıfır matrisi ile toplamı matrisi değiştirmez.
2. Bir matristen sıfır matrisi çıkarılırsa matris değişmez.
3. Bir matrisin sıfır matrisi ile çarpımı sıfır matrisine eşittir.

olur. Başka bir deyişle aynı tipten matrislerde *sıfır matrisi* toplamanın birim öğesidir. Çarpma tanımlı ise, sıfır matrisi çarpma işleminin yutanıdır. Gerçekten, toplama ve çarpma kurallarını kullanarak

$$\begin{aligned} A+O &= O+A \\ A-O &= A \\ A.O &= O.A = O \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Örnekler:

$$A \pm O = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

olduğu matrislerin toplamından görülür. Benzer olarak matrislerin çarpımı tanımından,

$$A.O = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

ve

$$O.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olur.

Kare Matrisin Köşegenleri

Sol üst köşeden sağ alt köşeye giden doğrultu üzerindeki bileşenler, kare matrisin *asal* (birincil) köşegenini oluşturur. Sağ üst köşeden sol alt köşeye giden doğrultu üzerindeki bileşenler, kare matrisin *yedek* (ikincil) köşegenini oluşturur.

Birim Matris

Asal köşegen üzerindeki bileşenleri 1 e eşit olan, öteki bütün bileşenleri 0 olan kare matrise birim matris denilir. Örneğin,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinden *birim* matristir.

Teorem 18.2. *Birim matris ile çarpıldığında çarpılan matris değişmez.*

Başka bir deyişle çarpım tanımlı olduğunda birim matris çarpma işleminin *birim öğesi* gibi davranır.

Örnekler:

$$A.I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

olduğu matrislerin çarpımından görülür. Benzer olarak,

$$I.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

18.3 Matrisin Devriği

Transpose of a Matrix

A bir kare matris olsun. Bileşenlerinin asal köşegene göre simetrilerinin alınmasıyla elde edilen matrise A nın e*devriği* (transpose) denilir ve A^T ile gösterilir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrisinin devriği} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisin devriği kavramının vektörel işlemlerde çok işe yaradığını ileride göreceğiz. Şimdilik bir kolon ile bir satırın çarpımını göstermekle yetineceğiz.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \big((x_1, x_2, \dots, x_n)\big)^T$$

Simetrik Matris

Devriği kendisine eşit olan metrise simetrik matris denilir:

$$A^T = A$$

Anti Simetrik Matris

Devriği kendisinin ters işaretlisine eşit olan metrise anti simetrik matris denilir:

$$A^T = -A$$

Ters Matris

Bmatrisinin A matrisiyle soldan ve sağdan çarpımları birim matris oluyorsa, B matrisine A matrisinin çarpmaya göre tersidir, ya da kısaca tersi'dir denilir:

$$AB = I = BA$$

Amatrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir. Buna göre, yukarıdaki eşitlikler

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

biçimini alır.

18.3.1 Üçgensel Matris

Karesel matrisin asal köşegeninin altında kalan bütün bileşenleri sıfıra eşitse, matrise üst köşegenel matris denilir. Benzer olarak, karesel matrisin asal köşegeninin üstünde kalan bütün bileşenleri sıfıra eşitse, matrise alt köşegenel matris denilir.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisi üst köşegenel matris,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisi alt köşegenel matristir.

18.4 Matrisin İzi (trace)

Asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin toplamına matrisin izi (trace) denilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisinin izi

$$iz(A) = tr(A) = 3 + 4 + (-1) + 8 = 14$$

olur.

18.5 Matris İşlemleri

Sayı kümeleri üzerinde yaptığımız toplama, çıkarma ve bölme işlemleri matrisler üzerinde çok kısıtlı olarak yapılabilir.

Satır ve kolon sayıları karşılıklı olarak eşit olan matrislere aynı tipten matrisler denilir.

18.6 Matrislerin Toplamı

Aynı tipten olan iki matris toplanabilir. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrislerinin toplamı, aynı indisli bileşenlerinin toplamından oluşur.

$$[A]_{ij} + [B]_{ij} = [A + B]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Önerme 18.1. *Toplama işlemi yer değişebilir (commutative).*

$$A + B = B + A$$

18.7 Matrislerde Çıkarma

Aynı tipten olan iki matrisin birisinden ötekisi çıkarılabilir. Çıkarma işlemi toplamanın tersidir. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrislerinin farkı, aynı indisli bileşenlerinin farkından oluşur.

$$[A]_{ij} - [B]_{ij} = [A - B]_{ij} = (a_{ij} - b_{ij})$$

Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -9 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Önerme 18.2. *Çıkarma işlemi yer değişemez (noncommutative).*

$$A - B \neq B - A$$

Matrisin Sayı ile Çarpımı

Tanım 18.1. *A matrisinin λ sayısı ile çarpımı matrisin her bileşeninin λ sayısı ile çarpımıdır.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & a_{12} & a_{i3}, \ldots, a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ise } \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3}, \ldots, \lambda a_{in} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{n3}, \ldots, \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ise } 3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.3 & 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

olur.

18.8 Matrislerin Çarpımı

A matrisinin kolon sayısı B matrisinin satır sayısına eşitse $A \times B$ çarpımı tanımlıdır. Bu koşul çarpma işlemi için gerekli bir kısıtlamadır. Bu koşulu sağlamayan iki matris çarpılamaz.

Sayılarda yaptığımız gibi, matris çarpımını $A \times B$, $A.B$ ya da AB simgelerinden birisiyle göstereceğix.

$A \times B = C$ çarpımında A nın i-inci satırın bileşenlerinin B nin j-inci kolonunun bileşenleriyle karşılıklı çarpımlarının toplamı, çarpımın c_{ij} bileşimine eşit olur.

Matrislerin çarpımı, matrisin bir sayı ile çarpımından farklıdır. Satır vektörlerinin kolon vektörleriyle skalar (dot products) çarpımından esinlenerek, matrislerin çarpımına *noktasal çarpı*m (dot product) da denilir. Bu kitapta *matris çarpımı* terimini kullanacağız.

Örnekler:

Çarpma işlemi için yalın durumlardan başlayan örnekler vereceğiz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+2 & 2+4 & 3+6 \\ 3+4 & 154 & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 10 & 14 & 21 \\ 11 & 16 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 239 & 154 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 20 & 13 \\ -2 & 0 & 10 \\ 21 & 18 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 13 & 9 & 7 & 15 \\ 8 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 63 & 37 & 75 \end{pmatrix}$$

Önerme 18.3. *Çarpma işlemi yer değişemez (noncommutative).*

$$A \times B \neq B \times A$$

Olumsuz bir örnek göstermek önermeyi ispatlamaya yeter.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 4\\10 & 8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\7 & 10\end{pmatrix}$$

Önerme 18.4. *Çarpma işlemi şu özelikleri sağlar:*

1. $(AB)C = A(BC)$ (Birleşme (associative))
2. $(A+B)C = AC + BC$ (sağdan dağılma (distributive)
3. $C(A+B) = CA + CB$ (sağdan dağılma)
4. $OA = AO = O$ (O sıfır matris)

18.9 Matrislerin Çarpımının Devriği

Teorem 18.3. *Çarpımın devriği matrislerin devriklerinin çarpımına eşittir.*

$$AB = C \Rightarrow (AB)^T = C^T = B^T A^T \tag{18.1}$$

olur.

İspat:

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ki})$ olduğunu varsayarsak, çarpım tanımından

$$c^T_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

yazabiliriz. Bileşenlerin gerçel sayı olduğunu düşünürsek, çarpma işleminde yer değiştirebilme özeliğini kullanarak

$$\sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk}$$
$$\sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b^T_{ik} a^T_{kj}$$

olur. Buradan (18.1) eşitliği çıkar.

Teorem 18.3, ikiden çok matrisin çarpımı için de geçerlidir. Örneğin,

$$(ABCD)^T = (CD)^T (AB)^T = (D^T C^T)(B^T A^T) = D^T C^T B^T A^T$$

eşitliği kolayca sağlanabilir. Bunu genelleştirmek istersek,

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \dots A_1^T$$

eşitliği yazılabilir.

Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrisleri verilsin.}$$

Bunların çarpımı

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ 24 & 24 & 24 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan çarpımın devriği,

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ 24 & 24 & 24 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

çıkar. Öte yandan

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

olduğu düşünülürse

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}$$

eşitliği kurulur.

Kare Matrisin Kuvveti

A bir kare matris ise A matrisini kendisiyle art arda çarpabiliriz. Sayılarda yaptığımız gibi, matrisin kuvvetleri için de

$$A = A,\ A.A = A^2,\ A.A.A = A^3,\ \ldots A.A.\ldots A = A^n$$

simgelerini kullanırız.

Matrislerde Bölme

Sayılarda var olan bölme işlemi matrislerde tanımlı değildir. Ancak $ax = b$ denkleminin çözümü için bilinen

$$x = \frac{b}{a} = a^{-1}b \tag{18.2}$$

eşitliğine benzer bir eylemi bazı matrisler için yapabiliriz. A ile B sabit iki matris, X bilinmeyen bir matris olmak üzere

$$AX = B \tag{18.3}$$

denkleminin çözümü, bazı kısıtlar altında

$$X = A^{-1}B \tag{18.4}$$

biçeminde yazılabilir. Bu eylemi kısıtlı bir matris bölmesi olarak düşünebiliriz. Ancak, A matrisinin A^{-1} ile gösterdiğimiz tersini bulmak için determinantlar ile ilgili ön bilgileri bilmemiz gerekiyor. Bu konu doğrusal denklem sistemlerinin çözümü ile de ilgilidir. O nedenle, ters matris bulmayı sonraki bölüme bırakacağız.

Bölüm 19

Determinantlar

Tanım 19.1. *Bir kare matrisin determinantı, o matrisi bir sayıya eşleyen fonksiyondur.*

Söz konusu fonksiyonun değerine o matrisin determinantı denilir.

A bir kare matris ise, determinantı $det(A)$ ya da $|A|$ ile gösterilir. Burada $|\ |$ simgesi mutlak değer için kullanılan simge değildir.

Determinantlar doğrusal denklem çözümlerinde çok işe yarar. Uygulamada bir çok olayın matematiksel modeli matrislerle kurulur. Matrislerin özelikleri yanında, ortaya çıkan durumların çözümlenmesi için determinantlar devreye girer.

Determinantları en genel durumuyla anlatmak belki en iyisidir, ama en pedagojik yol olduğu söylenemez. O nedenle, bbu kitapta, determinantları hiç bilmeyenlerin kolayca anlayacağı bir yöntemle anlatmayı tercih ediyoruz.

19.1 Determinatlar

1×1 Matrislerin determinantı

A matrisi en basit 1×1 tipinde bir matris olsun. Tek bileşeni sayı olan bu tip matrislerin determinantı, bileşen sayısıdır.

$A = [12]$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = 12$ olur. Benzer olarak,

$$A = (-12)$$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = -12$ olur.

2×2 **Matrislerinin determinantı**

A matrisi 2×2 tipinden bir matris olsun:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2×2 tipinden olan bu matrisin determinantı $|A| = (-1)(-4) - (3)(2) = -2$ biçiminde tanımlanır. Genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gibi 2×2 tipinden olan bir matrisin deteminantı

$$|A| = ab - cd$$

olarak tanımlanır.

3×3 **Matrislerinin determinantı**

A matrisi 3×3 tipinden bir matris olsun:

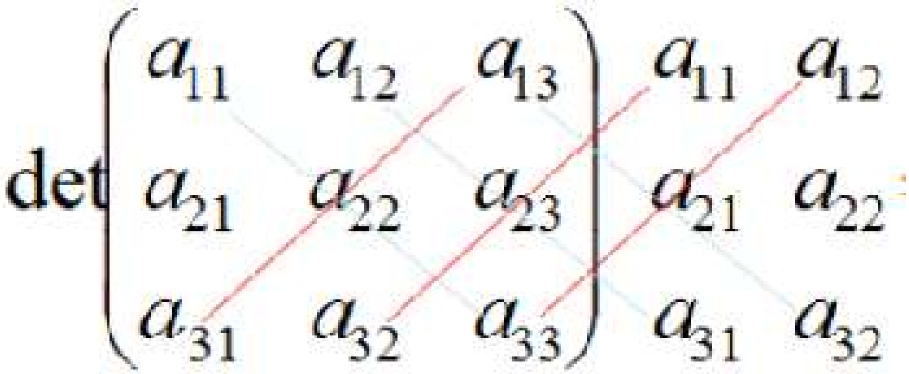
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3 tipinden olan bu matrisin determinantı

$$det(A) = |A| = (1)(4)(5)(2) + 2.3.7 + 5.(-2).6 - (7.4.5 + 6.3.1 + 5.(-2).2) = -136$$

biçiminde tanımlanır. genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Şekil 19.1: Sarrus Yöntemi

gibi 3×3 tipinden olan bir matrisin determinantı

$$\begin{aligned} det(A) &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Ancak bu tanım öncekilere göre biraz daha karmaşıktır. Bu karmaşıklığı yoketmek için daha basit bir yollar izlenebilir. izlenebilecek yollardan birisi, 3×3 tipinden matrislerin determinantını bulmaya yarayan Sarrus yöntemidir. Oldukça pratik olan bu yöntemi öğrenmek kolaydır.

Sarrus Yöntemi

3×3 tipinden A matrisinin sağ yanına birinci ve ikinci kolon bileşenlerini Şekilde görüldüğü gibi ekleyelim. Sonra $a_{11}a_{22}a_{33}$ asal köşegeni ile onun üstünde ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Benzer olarak, $(a_{31}a_{22}a_{13}$ yedek köşegeni ile onun altında ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Sonra birinci toplamdan ikinciyi çıkaralım. Çıkan sayı, verilen matrisin deterinantıdır (bkz. Şekil 19.1).

Sarrus yönetimi 3×3 tipinden matrislerin determinantlarını bulurken pratik kolaylık sağlar. Ama daha büyük boyutlu matrislere uygulanamaz. O nedenle, her tipten matrislere uygulanabilecek genel bir yönteme gereksinim vardır.

19.2 Başka Yöntemler

Yüksek Boyutlu Matrislerin Determinantlarının Hesaplanması

Yukarıda söylenen metotlar 2 ve 3 boyutlu matrisler içindir. Matrisin boyutu artınca o yöntemler işe yaramaz. Hangi boyutta olursa olsun, bir matrisin determinantını hesaplanak için *Laplace yöntemi* geçerli genel bir yöntemdir.

İşlemleri kısaltmak için *Gauss yoketme metodu* da oldukça pratik genel bir yöntemdir. Bu yöntemleri aşağıdaki örneklerle inceleyeceğiz.

Laplace Yöntemi

Minör

$n \times n$ tipinden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}, \ldots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin herhangi bir a_{ij} bileşeninin *minör*ü şöyle tanımlanır:

i-inci satır le j-inci kolon atılır. Geri kalan matrisin determinantı a_{ij} bileşenine karşılık gelen *minör*'dür. Buna göre, yukardaki A matrisinin a_{ij} bileşenine karşılık gelen minör

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

biçimindeki matrisin determinantıdır. Onu

$$
min(a_{ij}) = M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

biçiminde gösterelim. Tabii, minörü yazarken, yukarıda bileşenleri $\square$ ile gösterilen i-inci satır ile j-inci kolonun silineceğini unutmayacağız.

örnek:

$$
A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}
$$

matrisinin ikinci satırındaki bileşenlerin minörlerini bulalım. Önce A matrisini

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

matrisi gibi gibi düğünürsek, bu matrisin ikinci satırındaki bileşenlerine göre minörleri şöyle bulunur:

$a_{21} = 3$ bileşeninin minörü, a_{21} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 1. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$
min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

Bu determinantın değeri

$$
= 2.4 - 3.3 = 8 - 9 = -1
$$

olur. Benzer olarak, $a_{22} = 1$ bileşenini minörü, a_{22} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 2. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$
min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

Bu determinantın değeri

$$= 6.4 - 3.10 = 24 - 30 = -6$$

olur. Son olarak, $a_{23} = 1$ bileşeninin minörü, a_{23} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 3. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{13}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 6.3 - 2.10 = 18 - 20 = -2$$

olur.

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bun determinantın değeri

$$= 3.3 - 1.10 = 9 - 10 = -1$$

olur.

19.3 Determinantların Özelikleri

Determinantların pratikte çok işe yarayan özelikleri vardır. Bunları genel durum için ispat etmek yerine, yalnızca 2×2 tipi matrisleri çin göstermekle yetineceğiz.

Teorem 19.1. *Bir matrisin determinantı devriğinin determinatına eşittir.*

İspat

2×2 tipi A matrisi ve A^T devrişi (transpose) şöyledir.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ d & d \end{pmatrix}$$

dir. Buradan determinantlar arasında

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = |A^T|$$

eşitişi kurulabilir.

Teorem 19.2. *Üçgensel bir matrisin determinantı asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin çarpımına eşittir*

İspat

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - b.0 = ad = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & d \end{vmatrix} = |A^T|$$

Teorem 19.3. *Matrisin iki satırı kendi aralarında yer değiştirirse determinantları ters işaretli olur. Aynı özelik kolonlar için de geçerlidir.*

İspat

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - b.c = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

ve

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - b.c = -(bc - ad) = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

olur.

Teorem 19.4. *Matrisin bir satırı bir λ sayısı ile çarpılırsa, determinantı da o sayı ile çarpılmış olur.*

İspat

$$\lambda|A| = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda ad - \lambda b.c = \lambda(ad - bc) = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$$

olur.

Teorem 19.5. *Matrisin bir satırı bir λ sayısı ile çarpılıp başkaş bir satıra eklenirse, determinantı değişmez. Aynı özelik kolonlar için de vardır.*

İspat

$$|A| = \begin{vmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = ad - b.c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+\lambda a & d+\lambda b \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a+\lambda b & b \\ c+\lambda d & d \end{vmatrix} = ad - b.c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+\lambda a \\ c & d+\lambda c \end{vmatrix}$$

olur.

Teorem 19.6. *İki matrisin çarpımının determinantı determinantlarının çarpımına eşittir.*

İspat

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ve \ B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

matrislri verilsin.

$$|AB| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+cg & cf+dh \end{vmatrix} = (ad-b.c)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

olur.

19.4 Uygulamalar

Önerme 19.1. *Bir paralelkenarın alanı, kendisini oluşturan vektörlerden oluşan matrisin determinantına eşittir.*

İspat

Köğeleri $(0,0,(a,b),(a+c,b+d)ve(c,d)$ olan paralelkenar için, sözkonusu matris

Önerme 19.2. *Bir paralelyüzün hacmı, kendisini oluşturan vektörlerden oluşan matrisin determinantına eşittir.*

İspat

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinatını Sarrus yöntemiyle ya da Laplace yöntemiyle hesaplayabiliriz:

Sarrus Yöntemiyle Hesap:

$$\begin{aligned} det(A) &= (-2.1.-1) + (-3.-1.0) + (2.3.2) \\ &= -(-3.1.2) - (-2.3.0) - (2.-1.-1) \\ &= 2 + 0 + 12 - (-6) - 0 \\ &= 18 \end{aligned}$$

olur.

Laplace Yöntemiyle Hesap:

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{1+2}.2.det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2}.1.det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (-2).((-1).(-1) - 2.3 + 1.((-2).(-1) - 2.(-3)) \\ &= (-2)(-5) + 8 \\ &= 18 \end{aligned}$$

olur.

Gauss Yöntemiyle Hesap:

Gauss yöntemiyle determinant hesaplarken, matrisin bir satırına başka bir satırın bir sayısal katının eklenmesiyle determinantın değişmedişi gerçeğine dayalıdır. Tabii, aynı özelişin kolonlar içnde geçerli olduğunu biliyoruz. Boyutları 3 ya da daha çok olan matrislerde Gauss yoketme yöntemi diye adlandırılan bu yöntem işlemleri kolaylağtırır. Uygun katsayılar seçilerek, matris üçgensel biçeme sokulabilir. Bu bağarılamadığında, bir satır ya da kolondaki bileşenlerin bazıları 0 yapılabilir.

Bunu yukarıdaki örnek üzerinde gösterelim. Matrisin ikinci kolonu birinci kolona eklenirse,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. A ile A_1 matrislerinin determinantları aynıdır. A_1 matrisini birinci kolona göre açarsak

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{3+1}.2.det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2.(2.3 - 1.(-3)) \\ &= 18 \end{aligned}$$

olur.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinatını Gauss yoketme yöntemiyle bulalım. işlemleri açıklamak için matrisin i-inci satırını S_i ile j-inci kolonunu K_j ile gösrerelim. Buna göre birinci satırın iki katını alıp ikinci satıra ekleme eylemini $(S_2+2S_1) \longrightarrow (S_2)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $(S_3 + S_1) \longrightarrow (S_3)$ işlemlerini yapalım:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -(1)(3)(-5) \;\; = 15$$

19.5 Ters Matris

Her gerçel $a \neq 0$ sayısı için $\frac{a}{a} = aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ eşitlişini sağlayan bir a^{-1} sayısının varlığını biliyoruz. Öyleyse aklımıza ğu soru takılmlıdır: Acaba her A matrisi için

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \tag{19.1}$$

eşitlişini sağlayan bir A^{-1} matrisi var mıdır? Bu özeliğin gene ancak bazı kısıtlar altında var olduğunu göreceğiz.

Teorem 19.7. *Tersinebilir (invertible) matrisin determinantı, tersinin çarpımsal tersine eşittir.*

İspat

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

olduğunu bir örnekle göstereceğiz.

3×3 tipi matrislerin tersini bulmak için Gauss yoketme yöntemini kullananan pratik bir yöntemi bir örnek üzerinde göstereceğiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{19.2}$$

matrisinin tersini bulmak için, A matrisinin sağına birim matrisi aşağıda görüldüğü gibi ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.3}$$

Şimdi bu görüntüde soldaki A matrisini bir üçgen matris haline getirmek için Gauss yoketme yöntemini kullanacağız. (19.3) matrisine $S_2 - S_1$ işlemini sonra $S_3 - S_1$ işlemlerini uygulayalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.4}$$

olur. Şimdi (19.4) matrisinde $S_1 - 3S_3$ işlemini yaparsak, matris

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.5}$$

biçimini alır. Son olarak, soldaki A matrisini birim matrise dönüştürmek için (19.5) imatrisine $S_1 - 3S_3$ işlemini uygulayalım:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.6}$$

(19.6) matrisinin sağında oluşan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.7}$$

matrisi aradığımız ters matristir. Gerçekten bunun aradığımız ters matris olduğunu görmek için $A^{-1}A$ çarpımını yapmak yetecektir:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{19.8}$$

Matrislerin çarpım kuralını uygulayarak,

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7.1 - 3.1 - 3.1 & 7.3 - 3.4 - 3.3 & 7.3 - 3.3 - 3.4 \\ -1.1 + 1.1 + 0.1 & -1.3 + 1.4 + 0.3 & -1.3 + 1.3 + 0.4 \\ -1.1 + 0.1 + 1.1 & -1.3 + 0.4 + 1.3 & -1.3 + 0.3 + 1.4 \end{pmatrix} \tag{19.9}$$

olur ki buradan

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19.10}$$

çıkar.

Yüksek boyutlu matrislerin terslerini bulmak için daha genel olan Laplace yöntemini kısaca açıklayalım.bilmek için minör ve kofaktör kavramlarına gereksene vardır.

Eşçarpan (cofactor)

A matsisinin a_{ij} bileşeninin minörü M_{ij} olmak üzere

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det M_{ij}$$

sayısına a_{ij} bileşeninin *eşçarpanı* denilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{19.11}$$

matrisinin bileşenleri için eşçarpanları bulalım:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 0 = 15 \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 15 \tag{19.12}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 5 = -8 \Rightarrow A_{13} = (-1)^{1+2} M_{12} = +8 \tag{19.13}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 25 = -25 \Rightarrow A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -25 \tag{19.14}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 0 = 9 \Rightarrow A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -9 \tag{19.15}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14 \Rightarrow A_{22} = (-1)^{2+2} M_{21} = -14 \tag{19.16}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 = -15 \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} M_{21} = 15 \tag{19.17}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 = -17 \Rightarrow A_{31} = (-1)^{3+2} M_{31} = -17 \tag{19.18}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \Rightarrow A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -6 \tag{19.19}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \Rightarrow A_{31} = (-1)^{3+3} M_{31} = 13 \tag{19.20}$$

Buna göre eşçarpan matris

$$cof A = \begin{pmatrix} 15 & 8 & -25 \\ -9 & -14 & 15 \\ -17 & -6 & 13 \end{pmatrix} \tag{19.21}$$

olur.

19.6 Ekli Matris

Adjoint Matrix

A matrisinnin her bir a_{ij} bileşeni yerine a_{ij} bileşeninin eşçarpanı (cofactor) konularak elde edilen matrise A matrisisnin eklenmişi (adjoint) denilir ve $adjA$ simgesiyle gösterilir. Buna göre

$$(adjA)_{ij} = A_{ij} \tag{19.22}$$

olur. Bu gösterimler altında

$$A.(adjA)_{ij} = B \tag{19.23}$$

diyelim. Çarpma kuralı

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (adjA)_{kj} \tag{19.24}$$

bağıntısını verişr. Burada (19.22) kullanılırsa,

$$(adjA)_{kj} = A_{jk} \tag{19.25}$$

çıkar. Bu ise () gereğince

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}|A| \qquad i = j \tag{19.26}$$

$$= 0 \qquad i \neq j \tag{19.27}$$

olmasını gerektirir. O halde B matrisi bütün bileşenleri $|A|$ olan köşegen bir matristir. Öyleyse

$$A.(adjA)_{ij} = B = |A|.I \tag{19.28}$$

eşitliği yazılabilir.

19.7 Matrisin Tersi

A matrisi için

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A \tag{19.29}$$

koşulunu sağlayan A^{-1} matrisi A matrisinin tersidir. (19.29) eşitliğinin sol yanının olabilmesi için A nın satır sayısı I birim matrisinin satır sayısına eşit olmalıdır. Sağ yanının olabilmesi için I birim matrisinin satır sayısı A^{-1} ters matrisinin satır sayısına eşit olmalıdır. Soldaki çarpımların olabilmesi için A matrisinin kolon sayısı ile A^{-1} ters matrisinin satır sayısı eşit olmalıdır. Soldaki çarpımların olabilmesi için A^{-1} ters matrisinin kolon sayısı ile A matrisinin satır sayısı eşit olmalıdır. Bütün bunlardan A ile A^{-1} ters matrisinin aynı tipten karesel matris olmaları gerektiği çıkar.

Matrisleri lineer cebirde

$$AX = B \tag{19.30}$$

biçemindeki denklemleri çözmek için kullanırız. A matrisinin A^{-1} ters matrisi varsa, (19.30) denkleminin çözümü

$$AX = B \tag{19.31}$$

biçemine döner. Dolayısıyla, karesel matrislerin tersini bulma eylemi önem kazanır. Aşağıda ters matris bulmak için en genel kuramsal yöntemi vereceğiz. Hemen belirtelim ki, bu genel kural pratikte en iyi yöntem değildir. Örneğin,

17×17 tipinden bir matrisin tersini bulmak için yapılacak çarpma işlemlerinin sayısı

$$n! + (n-1)!n^2 = (n+1)! = 18! \tag{19.32}$$

tanedir. Saniyede 10^{-6} çarpma işlemi yapabilen hızlı bir bilgisayarın söylenen bütün çarpımları bitirebilmesi için 6.4×10^{15} saniye gereklidir. Bu ise 200 yıldan daha uzun bir zaman demektir.

O nedenle, matrisin tersini bulurken, biraz sonra anlatacağımız genel yöntem yerine *Gauss-Jordan* yoketme yöntemi daha pratiktir.