LİNEER CEBİR

MATRİSLER:

$i = 1,2,3,\dots,m$ ve $j = 1,2,3,\dots,n$ için a_{ij} sayılarının

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindeki tablosuna mxn tipinde bir matris denir.

$[a_{ij}]_{mxn}$ şeklinde gösterilir.

m satır, n sütun sayısıdır.

ÖRNEK:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{5} & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisi için ; $(a_{12})^2 - 4a_{21} - 5a_{32} = ?$

$(\sqrt{5})^2 - 4.4 - 5(-4) = 5 - 16 + 20 = 9$

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ:

A ile B matrislerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul karşılıklı elemanlarının eşit olmasıdır.

$\forall i, j \in N^+$ için $a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]_{mxn} = [b_{ij}]_{mxn}$

ÖRNEK:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & x & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -2 & z \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$ ise; $x+y+z=?$

x=4 , y=1 ve z=4 olduğundan 4+1+4=9 dur.

MATRİSLERİN TOPLAMI:

Matrislerin toplamı için, karşılıklı elemanların toplamı alınır.

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ ve $B=[b_{ij}]_{mxn}$ ise $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ şeklinde elde edilen $C=[c_{ij}]_{mxn}$ matrisine A ile B matrislerinin toplamı denir.

ÖRNEK:

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 2 \\ -5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 5e^{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \ln y & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ ise } \qquad x+y+z=?$$

$x^{-1}+2=3 \qquad \frac{1}{x}=1 \qquad x=1$

$-5+5=\ln y \qquad \ln y=0 \qquad y=1$

$3+5e^{z}=8 \qquad e^{z}=1 \qquad z=0$

$x+y+z=1+1+0=2$

SIFIR MATRİS:

Bütün elemanları 0 olan matrise sıfır matrisi denir.

TOPLAMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ:

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ matrisinin toplama işlemine göre tersi $-A=[-a_{ij}]_{mxn}$

SKALER İLE MATRİSİN ÇARPIMI:

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ matrisi ve $k\in R$ sayısı için; $k.A=[k.a_{ij}]_{mxn}$ dir.

- $(k_1+k_2)A = k_1A + k_2A$
  $k(A+B) = k.A + k.B$
  $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$

- $1.A = A \qquad (-1).A=-A \qquad 0.A=0_{mxn}$

- $A+B=B+A \qquad A+(B+C)=(A+B)+C$
  $A+0=0+A=A \qquad A+(-A)=(-A)+A=0$

MATRİSLERİN ÇARPIMI:

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ ve $B=[b_{ij}]_{nxp}$ matrislerinin çarpımı,

c_{ij} elemanı $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ olan $C=[c_{ij}]_{mxp}$ matrisine denir.

ÖRNEK:

- $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 75 & 88 \\ 55 & 64 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise A^{100}=?

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. . . . . .

$$A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & -300 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ise A^{2006}=?

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. . . . . .

$$A^{2006}=\left(A^2\right)^{1003}=\left(4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{1003}=2^{2006}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

KARE MATRİS:

Satır sayısı, sütun sayısına eşit olan matrislere kare matris denir.

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{mm}$ elemanlarının bulunduğu köşegene asal köşegen,
$a_{1m}, a_{2(m-1)}, \ldots, a_{m1}$ elemanlarının bulunduğu köşegene de yedek köşegen denir.

BİRİM MATRİS:

Asal köşegen üzerindeki elemanları 1, diğer elemanları 0 olan kare matrise birim matris denir. I_m ile gösterilir.

A, mxn türündeki bir matris ise; $I_m A = A = A.I_n$ dir.

- $(AB)C = A(BC)$ $\qquad A(B+C) = AB + AC$

UYARI:

- A.B=B ise A nın birim matris olması gerekmez.
- A.B=A.C ise B=C olması gerekmez.
- A.B=0 ise A veya B nin sıfır matris olması gerekmez.

ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ:

A, n'inci mertebeden bir kare matris olsun.
Eğer $A.B = I_n = B.A$ olacak şekilde n'inci mertebeden bir B kare matrisi varsa B ye, A nın tersi (inversi) denir.
A^{-1} ile gösterilir.

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ dır.

(Bir matrisin tersinin olabilmesi için $ad-bc \neq 0$ olmalıdır.)

- $A^{-1} = \dfrac{\overline{A}}{|A|}$

- $(A.B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\qquad (k.A)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

BİR MATRİSİN DEVRİĞİ:

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ matrisinin aynı numaralı satırıyla, sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen $[a_{ji}]_{nxm}$ matrisine A nın devriği (transpozesi) denir. A^t ile gösterilir.

- $(A^t)^t=A$ $\qquad$ $(A+B)^t=A^t+B^t$ $\qquad$ $(A.B)^t=B^t.A^t$

$(kA)^t=kA^t$ $\qquad$ $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

A kare matrisi için $A = A^t$ ise A ya simetrik matris denir.
(Her elamanı asal köşegene göre simetrik olan karesel matrislere simetrik matris denir.)

Sadece asal köşegenindeki elemanları sıfırdan farklı olan karesel matrislere köşegenel (diagonal) matris denir.

Asal köşegen üzerindeki her elemanı aynı olan köşegenel matrislere skaler matris denir.

Asal köşegen üzerindeki tüm elemanları 0, diğerleri de bu köşegene göre zıt işaretli fakat mutlak değerce eşit olan karesel matrislere antisimetrik matris denir.
($A^t=-A$ olmalıdır.)

Asal köşegenin üstünde kalan bütün elemanları sıfır olan kare matrislere alt üçgen matris denir.

ÖRNEK:

$$\begin{pmatrix} x-y & 2 \\ -3 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$ ise; $\qquad$ x.y=?

x-y=1
x+y=0 $\quad$ denklem sisteminin çözümünden;
x=1/2 ve y=-1/2 bulunur. x.y=-1/4

ÖRNEK:

$$\begin{pmatrix} 3x-5y \\ x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$ ise; (x,y)=?

$$\begin{pmatrix} 4x-4y \\ 2x-y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

4x-4y=y+1 4x-5y=1

2x-y+1=y-1 2x-2y=-2 denklem sisteminden

x=-6 ve y=-5 bulunur. (-6,-5)

ÖRNEK:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$ ise; A^3=?

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & -3+0 \\ -6+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 & 11 \\ 22 & -6 \end{pmatrix}$$

DETERMİNANT:

a, b, c, d$\in$R için; $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

olarak tanımlanan ifadeye ikinci dereceden determinant denir.

Bir $[a_{ij}]$ kare matrisinde a_{ij} teriminin bulunduğu satır ve sütunu atarak elde edilen n-1 inci mertebeden
M_{ij} matrisinin $|M_{ij}|$ determinantına a_{ij} teriminin minörü,
$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ sayısınada a_{ij} teriminin eş çarpanı (kofaktörü) denir.

3x3 biçimindeki bir matrisin determinantının birinci satıra göre açılımı :
$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ dır.

Determinant herhangi bir satıra göre açıldığında değeri değişmez.

Yalnız 3.sıradan determinantların değerini bulmak için Sarrus kuralı da kullanılabilir.

- Aynı numaralı satır ve sütun yer değiştirirse determinantın değeri değişmez.
- İki satırı veya iki sütunu yer değiştirirse determinantın işareti değişir.
- Bir satır veya bir sütunun tüm elemanları sıfır ise determinantın değeri sıfırdır.
- İki satır veya sütun elemanları aynı olan determinantın değeri sıfırdır.
- İki satır veya sütun elemanları orantılı olan determinantın değeri sıfırdır.
- Bir satır veya bir sütunun tüm elemanları k ile çarpılırsa, determinant k ile çarpılmış olur.
- Bir satır veya bir sütunun her elemanı, iki elemanın toplamı şeklinde ise determinant, iki determinantın toplamı şeklinde yazılabilir.

- Bir satır veya bir sütunun elemanları k ile çarpılıp, kendisine paralel bir satır veya sütuna eklenirse, determinantın değeri değişmez

- Herhangi bir satırın elemanları ile bir başka satıra ait elemanların kofaktörleri karşılıklı olarak çarpılır ve çarpımlar toplanırsa, bu toplam sıfıra eşittir.

- A ve B kare matrisleri için ; det(AB)=(detA)(detB) dir.

- $|A|^n=|A^n|$

EK MATRİS (ADJOİNT)

A kare matrisinin her elemanı yerine o elemanın eş çarpanları yazılarak elde edilen eş çarpanlar matrisinin devriğine A matrisinin ek matrisi (adjointi) denir.

$\overline{A}$ ile gösterilir.

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ için $\overline{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ dir.

TEKİL (SİNGÜLER) MATRİS:

Determinantı sıfır olan karesel matrislere tekil (singüler) matris denir.

Determinantı sıfır olmayan karesel matrislere de Regüler matris denir.

MATRİSİN RANKI:

A, mxn biçiminde bir matris olsun.A nın kare alt matrisleri arasında, determinantı sıfırdan farklı olanlardan sırası en büyük olanı r ise bu r sayısına A matrisinin rankı denir.

rank A= r biçiminde gösterilir.

DENK MATRİSLER:

A ile B aynı biçimde iki matris ve rankA=rankB ise

A ile B matrislerine denk matrisler denir. $A \approx B$ yazılır.

KRAMER KURALI:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

.

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

denklem sistemi **A.X = B** şeklinde yazılabilir.

$\Delta \neq 0$ için sistemin bir tek çözümü vardır. $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$

$\Delta=0$ ve Δ_i lerden en az biri sıfırdan farklı ise; **Ç = Ø**

$\Delta=0$ ve bütün $\Delta_i=0$ ise ; sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

ALIŞTIRMALAR:

A, 2x2 tipinde bir matris,

$A.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ve $A^{-1}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ise; A=? Y: $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-7}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{-9}{5} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.X + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ise; X=?

VEKTÖR UZAYI:

1. (V, +) sistemi değişmeli grup
2. $(r_1+r_2)x = r_1x+r_2x$
3. $r(x_1+x_2) = rx_1+rx_2$
4. $r_1(r_2x) = (r_1r_2)x$
5. $1.x = x$

$r_1, r_2 \in R$ ve $x_1, x_2 \in V$ olmak üzere; yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa V ye R üzerinde bir vektör uzayıdır denir.

$\vec{u} = r_1\vec{x_1} + r_2\vec{x_2} + ... + r_n\vec{x_n}$ vektörüne,

$\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}$ vektörlerinin bir lineer birleşimi denir.

$\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}$ elemanlarının bütün lineer bileşenlerinden oluşan kümeye

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ in gerdiği alt uzay denir.

$\Delta \neq 0$ ise; gererler,

$\Delta = 0$ ise; germezler.

$r_1\overrightarrow{x_1} + r_2\overrightarrow{x_2} + ... + r_n\overrightarrow{x_n} = 0$ olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı $r_1, r_2, ..., r_n$ sayıları varsa vektörler lineer bağımlıdır denir.

$\Delta = 0$ ise lineer bağımlı,

$\Delta \neq 0$ ise lineer bağımsızdır.

- Vektör sayısı boyut sayısından fazla ise vektörler lineer bağımlıdır.
- Vektörlerden biri $\vec{0}$ ise vektörler lineer bağımlıdır.

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ vektörleri V yi gerer ve lineer bağımsızsa bu vektörlere V nin bir tabanı denir. V nin boyutu n dir.

DÜZLEMDE GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER:

Düzlemde A(x, y) noktasını

$x' = a_1x + b_1y + c_1$

$y' = a_2x + b_2y + c_2$ lineer denklem sistemi yardımıyla A′(x′, y′) noktasına karşı getiren fonksiyona geometrik dönüşüm denir.

X′= $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ P= $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ X= $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ C= $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

X′ = P.X+C

ÖTELEME: f(x, y) = (x+a, y+b)

DÖNME: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

O ya göre SİMETRİ: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

y=x e göre SİMETRİ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

y=0 a göre SİMETRİ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

x=0 a göre SİMETRİ: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

HOMOTETİ: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $(a > 0)$

BENZERLİK: $k\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(homoteti ile dönmenin bileşkesidir.)

LİNEER (DOĞRUSAL) DÖNÜŞÜMLER:

$f: U \to V$ $x, y \in U$ $a \in R$ için;

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(ax) = af(x)$ olmalıdır.

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$R^2 \to R^3$ dönüşümünde matris A_{3x2} dir.

$f \to A$ ve $g \to B$ ise ; $gof \to B.A$ dır.

ALIŞTIRMALAR:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 407 \quad ?$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ve $f(x)=2x^3-x^2+2$ veriliyor. $f(A)=?$