Atatürk Üniversitesi

Açıköğretim Fakültesi

Matematik I

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ

Matematik I

ISBN: 978-975-442-918-3

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINI

ERZURUM, 2017

İÇİNDEKİLER

Editör

Prof. Dr. ABDULLAH MAĞDEN

Prof. Dr. HALİT ORHAN

Prof. Dr. SEZGİN AKBULUT

KÜMELER

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Küme kavramını tanımlayabilecek ve kümeleri yazabilecek,
  - Elemanları verilen kümeleri ifade edebilecek,
  - Kümeler üzerinde işlemler yapabilecek ve kümeler ile ilgili problemleri çözebileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Doç. Dr. İsa YILDIRIM

ÜNİTE

1

Küme Kavramı

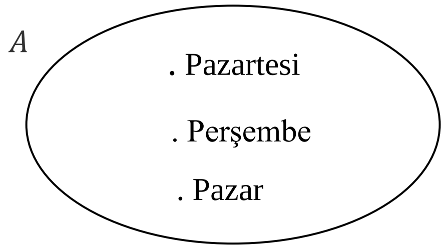
- ***Kümenin tanımı***
- ***Kümelerin gösterilişi ve bazı küme örnekleri***

Kümelerin Değişik Biçimlerde İfadesi

- ***Kümelerin gösterim yöntemleri***

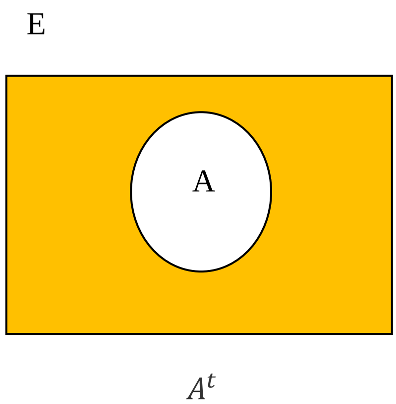
  (liste yöntemi, ortak özellik yöntemi

  ve Venn şeması yöntemi)



Kümeler Üzerinde İşlemler

- ***Kümelerin birleşim, arakesit, alt küme, fark, tümleyen tanımları***
- ***Evrensel küme ile ilgili özellikler***
- ***Birleşim ve kesişim ile ilgili özellikler***
- ***Kartezyen Çarpımın Özellikleri***



GİRİŞ

Doğada her zaman var olan ve uzun yıllar boyunca kullanılan küme kavramının matematiksel tanımının yapılması ve isimlendirilmesi 19. yüzyılda olmuştur. Sayılar, denklemler ve fonksiyonlar üzerinde çok sayıda çalışmalar yapılmasına rağmen bunların belirli topluluklarının küme olarak isimlendirilmesi uzun bir zaman almıştır. Dolayısıyla matematik dilinde birlik sağlama ihtiyacı, geçmiş yüzyıllar boyunca matematikçileri meşgul eden durumlardan biri olmuştur. Bu birliğin kümelerle sağlanabileceğini ifade eden ve 1845-1918 yılları arasında yaşamış ünlü Alman matematikçi Georg Cantor'dur. Zaten sonlu ve sonsuz kümeleri oluşturmak amacında olan Cantor, bu amaca ilk ulaşanlardan biriydi. 1874 yılında yayımlanan Cantor'un makalesi, kümeler kuramının ortaya çıkışında önemli bir adım olarak görülür. Meşhur Alman matematikçisi Cantor, tüm matematik çalışmalarında ve problemlerinde kullanılan nesnelerin kendi aralarında belirli özelliklere göre gruplanabileceğini, bu durumda araştırma veya problemin anlaşılabilirliğini ve çözüme yönelik işlemlerin daha kolay yapılabileceğini fark etmiştir. Buradaki "nesne" soyut ya da somut bir kavramı ifade eder. Bu bir sayı, şekil, harf veya farklı bir kavram olabilir. Bolzano, Russell, Zermela, Fraenkel, Von Neumann, Bernays ve Gödel gibi matematikçiler kümeler kuramının geliştirilmesine önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Kümeler kuramı genellikle değişik formal disiplinlerin içinde tanımlanabildiği bir çalışma alanı oluşturur. İnsanın soyut düşünme çabasında, mantıksal ilişkiler oluştururken, parça-bütün bağlantılarını anlama uğraşında, kümeler kuramının önemli katkıları olabilir. Bugün, kümeler kuramı, daha yetkin, daha işlevsel bir yapıya kavuşturulmaya çalışılırken, mühendislikten iktisada ve yapay zekâ çalışmalarına dek geniş bir uygulama alanı bulabilmektedir.

Küme kavramı ile ilgili çalışmalar günümüzde hâlâ devam etmektedir.

KÜME KAVRAMI

Günlük hayatımızda ve bilimsel anlamda kullandığımız tanımsız kabul edilen bazı kavramlar vardır. Nokta, doğru, düzlem ve küme gibi kavramlar bunlardan birkaçıdır. Her ne kadar bunlar tanımsız kabul edilse de matematiksel olarak bu kavramları ifade etmek gerekir. Dolayısıyla kümenin tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.1. İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerin veya şekillerin oluşturduğu topluluğa küme denir.

Buradaki *iyi tanımlanmış* ifadesiyle; kimi, bazı, birkaçı gibi kişisel ifadeleri içermeyen, herkes tarafından bilinen ve belirli olan varlık demektir. Kümelerin hangi elemanlardan oluştuğu şüpheye düşürmeden açık bir şekilde belirtilmelidir.

Örneğin, "bazı çift sayılar" veya "Atatürk Üniversitesindeki bazı uzun boylu öğrenciler" gibi ifadeler bir küme oluşturmaz. Çünkü bazı çift sayılar derken hangi sayıların bu gruba dâhil olup olmadığı kesin olarak belirlenemez. Diğer örnekte de hangi öğrencilerden bahsedildiği açıkça belirtilmemiştir. Yani bu iki ifade de iyi tanımlı değildir.

Yukarıdaki örnekler, "5 ile 35 arasındaki çift sayılar" veya "Atatürk Üniversitesindeki boyu 1.50 m'den uzun öğrenciler" şeklinde değiştirilirse bunlar birer küme belirtir. Çünkü 5 ile 35 arasındaki çift sayılar yazılabilir ve Atatürk Üniversitesindeki boyu 1.50 m'den uzun öğrenciler belirlenebilir.

Bir kümeyi oluşturan nesnelere veya sembollere kümenin elemanları denir. Kümeler genellikle $\mathrm{A, B, C, X}$ *... gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise* $\mathrm{a, b, c, x}$ *... gibi küçük harflerle gösterilir [5].*

Bir elemanın verilen bir kümeye ait olup olmadığını belirlemek için $\in$ veya $\notin$ sembolleri kullanılır. Örneğin, bir a elemanı A kümesinin elemanı ise $a \in A$ şeklinde yazılır ve "a eleman A" veya "a, A kümesinin elemanıdır" şeklinde okunur. Benzer şekilde, bir b elemanı A kümesinin elemanı değil ise $b \notin A$ şeklinde yazılır ve "b eleman değil A" veya "b, A kümesinin elemanı değildir." şeklinde okunur.

Bir A kümesinin eleman sayısı gösterilirken genellikle $s(A)$ veya $n(A)$ sembollerinden biri kullanılır. Bu kitapta $s(A)$ sembolü kullanılacaktır.

Boş kümenin eleman sayısı 0'dır (sıfır).

Tanım 1.2. Elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme $\emptyset$ veya $\{\quad\}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Diğer taraftan $\{\emptyset\}$ kümesi boş küme değildir. Çünkü bu kümenin bir tane elemanı vardır ve bu eleman da $\emptyset$'dir.

KÜMELERİN GÖSTERİMLERİ

Kümeler gösterilirken aşağıdaki üç yöntemden biri kullanılır.

- Liste yöntemi
- Ortak özellik yöntemi
- Venn şeması yöntemi

Şimdi bu yöntemler sırasıyla aşağıda verilecektir.

Liste Yöntemi

Kümenin elemanları, küme parantezine alınarak ve elemanlar virgülle birbirinden ayrılarak gösterilir. Küme parantezi "$\{\quad\}$" şeklindedir.

Örnek

•Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi A olsun. Bu küme liste yöntemi ile;

$$A = \{\text{Pazartesi, Perşembe, Pazar}\}$$

şeklinde gösterilir.

Ortak Özellik Yöntemi

Bir kümenin tüm elemanlarının sağladığı ortak özellikler varsa bu özellikler yardımıyla küme gösterilebilir. Küme yazılırken "öyle ki" anlamına gelen ":" veya "|" sembolü kullanılarak elemanların sağladığı özellikler parantez içinde yazılır. Örneğin, k özelliğine sahip elemanların kümesine A dersek

$$A = \{x : x, k \text{ özelliğine sahiptir}\}$$

veya

$$A = \{x | x, k \text{ özelliğine sahiptir}\}$$

şeklinde yazılır. Bu iki küme "x öyle ki x, k özelliğine sahiptir" veya "k özelliğine sahip x elemanlarının kümesi" şeklinde okunur.

Örnek

• Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi A olsun. Bu küme ortak özellik yöntemi ile

$$A = \{x : x, \text{haftanın P harfi ile başlayan günleri}\}$$

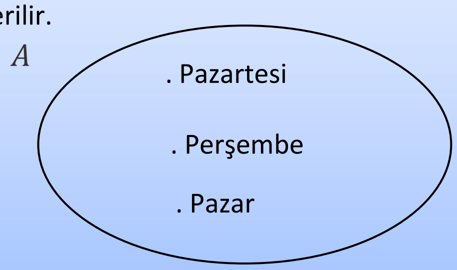
şeklinde gösterilir.

Venn Şeması Yöntemi

Kümenin elemanları kapalı bir eğri (daire, kare, dikdörtgen vb.) içine yanlarına nokta konularak yazılır.

Örnek

• Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi, venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.



KÜMELER ÜZERİNDE İŞLEMLER

Bu bölümde bir ya da daha fazla küme üzerinde tanımlanan bazı işlemler verilecektir.

Tanım 1.3. Aynı elemanlardan oluşan kümelere eşit kümeler denir ve "=" sembolü kullanılarak gösterilir.

Örneğin, A ve B kümeleri eşit ise $A = B$ şeklinde, bu kümeler eşit değilse $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Küme içerisindeki elemanların kendi aralarında yer değiştirmesi, kümeyi değiştirmez.

Örnek

•$A = \{2, 4, 6\}$ ve $B = \{6, 2, 4\}$ kümeleri aynı elemanlardan oluştukları için eşit kümelerdir ve $A = B$ dir.

Tanım 1.4. A ve B herhangi iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A ya B nin alt kümesi denir ve bu $A \subseteq B$ ile gösterilir. "A alt küme B" diye okunur.

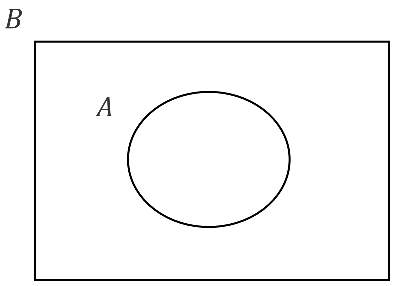
Aynı zamanda bu ifade $B \supseteq A$ şeklinde de yazılabilir ve "B kapsar A" diye okunur.

Eğer $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise A ya B nin *öz (has) alt kümesi* denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir. Diğer bir deyişle, bir kümenin alt kümelerinde kümenin kendisi de bulunur. Kümenin kendisi hariç alt kümeleri, bu kümenin öz alt kümelerini oluşturur.

Bu kitapta, karışıklığı önlemek için hem alt küme hem de öz alt küme gösterimlerinde "⊂" simgesi kullanılacaktır. Yani,

A kümesi B kümesinin alt kümesi ise $A \subset B$, alt kümesi değilse $A \not\subset B$ sembolü kullanılacaktır.

Yukarıdaki tanım şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 1.1. $A \subset B$ nin şematik olarak gösterilişi

Alt küme ile ilgili aşağıdaki özellikler verilebilir. A, B ve C boş olmayan kümeler olsun. Bu durumda;

- Her A kümesi için $A \subset A$ ve $\emptyset \subset A$,
- $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$,
- $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$'dir.

Örnek

•$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri için A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı olduğundan $A \subset B$'dir.

Örnek

•$A=\{a,b\}$ kümesinin tüm alt kümeleri; $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ ve $\{a,b\}$ dir. $\emptyset$, $\{a\}$ ve $\{b\}$ ise A kümesinin öz alt kümeleridir.

Yukarıdaki örnekten aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Eleman sayısı n *olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı* 2^{n} *ve öz alt kümelerinin sayısı ise* $2^{\mathrm{n}}-1$*'dir.*

Örnek

•$A=\{1,2,a,b,9\}$ kümesinin eleman sayısı 5 olduğundan bu kümenin alt kümelerinin sayısı

$$2^5=32'\text{dir.}$$

Örnek

•Öz alt kümelerinin sayısı 63 olan bir kümenin eleman sayısını bulunuz.

"⇒" sembolü "ise" anlamına gelir.

Çözüm: Eleman sayısı n olan bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı 2^n-1 olduğundan

$$2^n-1=63 \Rightarrow 2^n=64 \Rightarrow n=6$$

olur.

Tanım 1.5. Üzerinde çalıştığımız en geniş kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir.

Bu bölümde aksi söylenmedikçe *tüm kümeler* E *evrensel kümenin alt kümesi olarak kabul edilecektir.*

Tanım 1.6. A ve B iki küme olmak üzere;

- A ve B kümelerinden en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A ile B kümelerinin birleşimi denir. Bu küme $A\cup B$ ile gösterilir ve "A birleşim B" diye okunur. Ayrıca bu küme ortak özellik yöntemi ile
  $$A\cup B=\{x: x\in A \text{ veya } x\in B\}$$
  şeklinde yazılır.

Ayrık kümeler, ortak hiçbir elemanı olmayan kümelerdir.

- A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin kesişimi (arakesiti) denir. Bu küme $A\cap B$ ile gösterilir ve "A kesişim B" veya "A arakesit B" diye okunur. Buna göre;
  $$A\cap B=\{x: x\in A \text{ ve } x\in B\}'\text{dir.}$$
  Eğer $A\cap B=\emptyset$ ise A ve B kümelerine *ayrık kümeler* denir.
- A kümesinin elemanı olduğu hâlde B kümesinin elemanı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin farkı denir. Bu küme

$A \setminus B$ veya $A - B$ şeklinde gösterilir ve "A fark B" diye okunur. Bu fark kümesi ortak özellik yöntemi ile

$$A \setminus B \ = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

şeklinde yazılır.

- E, evrensel küme olmak üzere, A kümesinde olmayan fakat E 'de olan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A^t veya $E \setminus A$ şeklinde gösterilir. Buna göre;

$$A^t \ = \{x : x \notin A \text{ ve } x \in E\}\text{'dir.}$$

Örnek

•A ve B kümeleri

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre sırasıyla $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.

Aynı elemanlar, kümede sadece bir kez yazılmalıdır.

Herhangi bir A kümesi için $(A^t)^t = A$ 'dır [3].

Çözüm: $A \cup B$ kümesi, A veya B kümelerinin elemanlarının tümünden oluşan küme olduğundan;

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ olur.}$$

$A \cap B$ kümesi, A ve B kümelerinin ortak elemanlarının oluşturduğu küme olduğundan;

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \text{ dür.}$$

$A \setminus B$ kümesi, A kümesine ait olan ve B kümesine ait olmayan elemanlardan oluşan küme olduğundan;

$$A \setminus B = \emptyset\text{'dir.}$$

Benzer şekilde $B \setminus A$ kümesi, B kümesine ait olan ve A kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan;

$$B \setminus A = \{5, 6, 7, 8\} \text{ olur.}$$

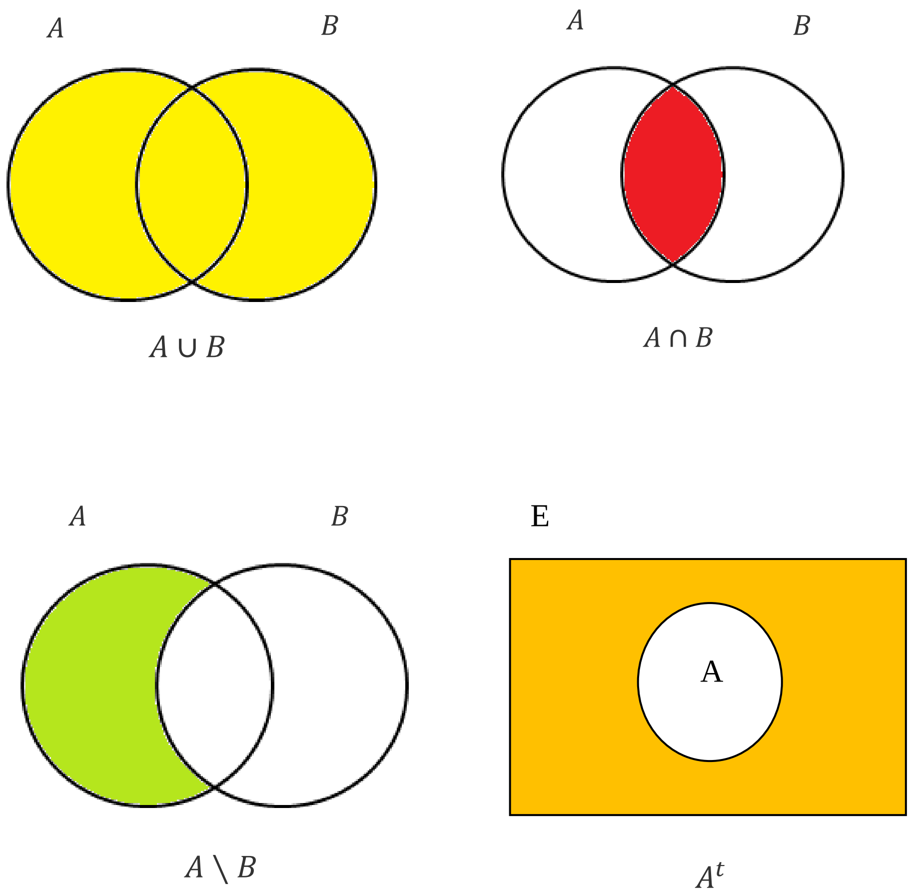
Örnek

•A ve B kümeleri;

$$A = \{1, 2, a, b\}, B = \{3, x, 4, y\}$$

şeklinde veriliyor. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan A ve B kümeleri ayrık kümelerdir.

Aşağıdaki şekilde verilen A ve B kümeleri için sırasıyla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^t kümeleri gösterilmiştir.



Şekil 1.2. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^t kümelerinin venn şeması ıle gösterilişi

Şekil 1.2'de verilen A^t kümesi aynı zamanda $E \setminus A$ kümesine eşittir.

Örnek

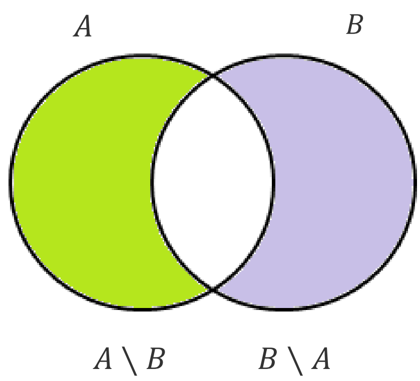
• $E = \{1, 2, 3, 4, a, b, c\}$ ve $A = \{2, 4, c\}$ olmak üzere A^t kümesini bulunuz.

Çözüm: A^t kümesi, A kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu küme olduğundan;

$$A^t = \{1, 3, a, b\} \text{ olur.}$$

Tanım 1.7. A ve B kümeleri verilsin. Bu kümelerden birine ait olup diğerine ait olmayan elemanların kümesine A ve B kümelerinin simetrik farkı denir ve $A \Delta B$ ile gösterilir. Bu küme;

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ veya } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ olarak ifade edilir.}$$



Şekil 1.3. $A\Delta B$ kümesinin şematik olarak gösterilişi

Örnek

•A ve B kümeleri;

$$A = \{1, a, b, c, 3, 5, 7\},\ B = \{1, 2, 3, a, 5, b, 6\}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre $A\Delta B$ kümesini bulunuz.

$s(A\Delta B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A)$'dır.

Çözüm: $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ olduğundan

$$A\Delta B = \{c, 7\} \cup \{2, 6\}$$

$$= \{c, 2, 6, 7\}$$ olur.

Bireysel Etkinlik

- $E = \{1, e, 3, b, 7, 9, k\}, A = \{1, 3, k\}$ ve $B = \{b, 9\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ ve A^t kümelerini bulunuz.
- Bir kümenin alt kümeleri ile öz alt kümelerinin toplam sayısı 127 olduğuna göre bu kümenin eleman sayısını bulunuz.
- $[(A^t)^t \cap A] \cup A$ işleminin sonucu nedir?

Şimdi yukarıda kümeler üzerinde tanımlanan birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri ile ilgili bazı özellikler verilecektir.

Evrensel Küme İle İlgili Özellikler

E bir evrensel küme ve $A, B \subset E$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler yazılabilir [1]:

1) $A \cup E = E$ **2)** $A \cap E = A$ **3)** $\emptyset \cup E = E$

4) $\emptyset \cap E = \emptyset$ **5)** $E = A \cup A^t$

Bu özelliklerin doğruluğu ayrıca Şekil 1.2'den de kolayca görülebilir.

Örnek

•$E = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 15\}$ ve $A = \{1, 4, 9, 15\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre A^t kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm: E evrensel kümesinin eleman sayısı 8 ve A kümesinin eleman sayısı 4 tür. Yani $s(E) = 8$ ve $s(A) = 4$ yazılır. Yukarıdaki 5. özellikten dolayı;

$$s(E) = s(A) + s(A^t)$$

$$8 = 4 + s(A^t)$$

olduğundan $s(A^t) = 4$'tür (veya verilen soruda $A^t = \{2, 3, 7, 10\}$ dur. Dolayısıyla $s(A^t) = 4$ olur).

Birleşim İşlemi İle İlgili Özellikler

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \subset (A \cup B),\ B \subset (A \cup B)$
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
6. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
7. $s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C)$

    1. $-s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$'dir.

Örnek

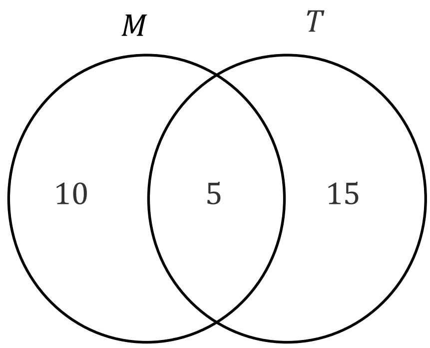
•$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = B \cup A$ dır.

Örnek

•Bir sınıftaki her öğrencinin Matematik ve Türkçe derslerinin en az birinden geçtiği biliniyor. Bu sınıfta Matematik dersinden geçen 15 öğrenci, Türkçe dersinden geçen 20 öğrenci ve her iki dersten geçen 5 öğrenci olduğuna göre bu sınıftaki öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm: Bu soruyu aşağıdaki şemayı kullanarak çözelim. Matematik dersinden geçen öğrencilerin kümesi M ve Türkçe dersinden geçen öğrencilerin kümesi T olsun. Buna göre;

$$s(M) = 15, s(T) = 20 \text{ ve } s(M \cap T) = 5 \text{ olur.}$$



Yukarıdaki 6. özellik kullanılırsa

$$s(M \cup T) = s(M) + s(T) - s(M \cap T)$$
$$= 15 + 20 - 5$$
$$= 30 \text{ bulunur.}$$

Örnek

- Bir sınıfta bulunan öğrencilerle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir. 12 öğrenci İngilizce, 16 öğrenci Fransızca, 8 öğrenci Almanca, 2 öğrenci İngilizce ve Fransızca, 3 öğrenci İngilizce ve Almanca, 1 öğrenci Fransızca ve Almanca, 2 öğrenci ise hem İngilizce hem Fransızca ve hem de Almanca dillerini konuşmaktadır. Bu üç dili de konuşamayan öğrenci sayısı 5 olduğuna göre bu sınıftaki öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm: İngilizce, Fransızca ve Almanca konuşan öğrencilerin oluşturdukları kümeler sırasıyla $\dot{I}$, F ve A harfleriyle gösterilsin. Buna göre;

$$s(\dot{I}) = 12, s(F) = 16 \text{ ve } s(A) = 8 \text{ olur.}$$

İngilizce ve Fransızca bilenlerin kümesi $\dot{I} \cap F$ olduğundan $s(\dot{I} \cap F) = 2$,

İngilizce ve Almanca bilenlerin kümesi $\dot{I} \cap A$ olduğundan $s(\dot{I} \cap A) = 3$,

Fransızca ve Almanca bilenlerin kümesi $F \cap A$ olduğundan $s(F \cap A) = 1$,

İngilizce, Fransızca ve Almanca bilenlerin kümesi $\dot{I} \cap F \cap A$ olduğundan $s(\dot{I} \cap F \cap A) = 2$ olur.

Yukarıdaki 5. özellik kullanılırsa

$$s(\dot{I} \cup F \cup A) = s(\dot{I}) + s(F) + s(A) - s(\dot{I} \cap F) - s(\dot{I} \cap A)$$
$$-s(F \cap A) + s(\dot{I} \cap F \cap A)$$
$$= 12 + 16 + 8 - 2 - 3 - 1 + 2$$
$$= 32 \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu değer İngilizce, Fransızca ve Almanca dillerinden en az birini konuşan öğrencilerin sayısıdır. Soruda bu üç dili de konuşamayan öğrenci sayısı 5 olarak verilmiştir. Öyleyse sınıftaki toplam öğrenci sayısı

$$32 + 5 = 37\text{'dir.}$$

Kesişim İşlemi İle İlgili Özellikler

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $(A \cap B) \subset A,\ (A \cap B) \subset B$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. Eğer A ve B kümeleri ayrık (yani $A \cap B = \emptyset$) ise
   $$s(A \cup B) = s(A) + s(B)\text{'dir.}$$

Kümeler üzerinde tanımlanan birleşim ve kesişim işlemlerinin birbiri üzerlerine dağılma özellikleri vardır. A, B ve C kümeleri verilsin. Buna göre;

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ özellikleri vardır [4].

Teorem 1.1. (De Morgan Kuralı)

A ve B iki küme olmak üzere;

a) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$ b) $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$ ‘dir [2].

Örnek

• $E = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d\}$, $A = \{a, d\}$ ve $A^t \cap B^t = \{2, 3, c\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \cup B$ kümesini bulunuz.

Çözüm: De Morgan kuralına göre $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$ olduğundan;

$$(A \cup B)^t = \{2, 3, c\} \text{ ‘dir.}$$

Buradan $A \cup B = \{1, 4, a, b, d\}$ olur.

Bu bölümde son olarak fonksiyonların tanımında ve grafik çizimlerinde de kullanılacak olan aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 1.8. A ve B boş olmayan herhangi iki küme olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere (a, b) ikililerinin oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir. Buna göre;

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}\text{'dir.}$$

Yukarıdaki tanımdan da görüleceği gibi $A \times B$ kümesi, birinci elemanı A kümesinden ve ikinci elemanı B kümesinden alınarak elde edilen sıralı ikililerden oluşan kümedir.

(a, b) ve (c, d) *ikililerinin birbirine eşit olması için aynı sıradaki elemanların birbirine eşit olması gerekir.* Yani $a = c$ ve $b = d$ olmalıdır. Aksi takdirde $(a, b) \neq (c, d)$ olur.

Not: Eğer $a \neq b$ ise $(a, b) \neq (b, a)$ 'dır.

Örnek

- $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \times B$ kümesi
- $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$'dir.
- Benzer şekilde $B \times A$ kümesi
- $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ olur.

"⇔" sembolü "ancak ve ancak" anlamına gelir.

Bu örnekten de görüldüğü gibi $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin birbirine eşit olması gerekmez.

Not: Eğer $A = B \Leftrightarrow A \times B = B \times A$ olur.

Örnek

- $(a, 2) = (3, b)$ eşitliği veriliyor. Buna göre $3a + 5b$ değerini bulunuz.

Çözüm: İki sıralı ikilinin birbirine eşit olması için aynı sırada bulunan ifadelerin birbirine eşit olması gerektiğinden üstte bahsedildi. Yani,

$$(a, 2) = (3, b) \text{ ise } a = 3 \text{ ve } b = 2\text{'dir.}$$

Öyleyse

$$3a + 5b = 3.3 + 5.2 = 19 \text{ olur.}$$

$A \times B$ kümesi (a, b) şeklindeki sıralı ikililerden oluştuğu gibi, $A \times B \times C$ kümesi de (a, b, c) şeklindeki sıralı üçlülerden oluşur. Böylece dört veya daha fazla kümenin kartezyen çarpımı için bu ifade benzer şekilde genelleştirilebilir.

Örnek

- $A = \{5, 7\}, B = \{a, b\}$ ve $C = \{x, y\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $(A \times B) \times C$ çarpım kümesini bulunuz.

Çözüm: Bunun için öncelikle $A \times B$ kümesini bulalım. Buradan

$$A \times B = \{(5, a), (5, b), (7, a), (7, b)\}\text{'olur.}$$

Dolayısıyla $(A \times B) \times C$ kümesi

$$(A \times B) \times C = \{(5, a, x), (5, b, x), (7, a, x), (7, b, x),$$

$(5,a,y),(5,b,y),(7,a,y),(7,b,y)\}$'dir.

Not: Boş olmayan bir A kümesinin kendisi ile kartezyen çarpımı $A \times A$ şeklinde gösterilir. $A \times A$ nın yerine bazen A^2 sembolü kullanılır. Benzer şekilde $A \times A \times A = A^3$ yazılır. Buna göre reel sayılar kümesindeki kartezyen çarpım $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek

•$A = \{1,2,3\}$ kümesi için $A \times A$ kümesi $A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ olur.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

A, B ve C kümeleri için kartezyen çarpımla ilgili aşağıdaki özellikler vardır:

1. $A \times \emptyset = \emptyset$ veya $\emptyset \times A = \emptyset$
2. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
5. $s(A \times B) = s(A).s(B) = s(B).s(A) = s(B \times A)$
6. $s(A \times B \times C) = s(A).s(B).s(C)$ 'dir.

Örnek

•$s(A) = n, s(B) = 2n$ ve $s(A \times B \times C) = 30$ ise C kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm: $s(A \times B \times C) = s(A).s(B).s(C)$ olduğundan

$$30 = n.2n.s(C) \Rightarrow 15 = n^2.s(C) \text{ yazılır.}$$

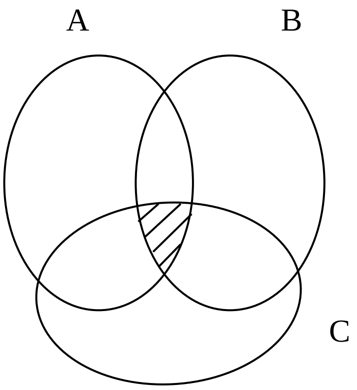
Bu eşitliğin sağlanması için $n = 1$ olmalıdır. Bu durumda C kümesinin eleman sayısı 15'tir.

Özet

- Küme, iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesneler veya şekiller topluluğudur. Kümeler genellikle A, B, C, X ... gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a, b, c, x ... gibi küçük harflerle gösterilir. Bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ ile gösterilir. Bir nesnenin, bir kümeye ait olup olmadığını belirtmek için $\in$ veya $\notin$ sembolleri kullanılır. Bir a elemanı A kümesine aitse $a \in A$ şeklinde gösterilir ve "a elemanıdır A nın" diye okunur. Eğer a elemanı A kümesine ait değilse "a elemanı değildir A nın" diye okunur. Kümeler; listeleme yöntemi, ortak özellik yöntemi ve Venn şeması yöntemlerinden herhangi birisiyle gösterilebilir.
- A ve B gibi iki küme verildiğinde eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı oluyorsa A' ya B nin alt kümesi denir ve bu $A \subset B$ ile gösterilir. Eleman sayısı n olan bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n dir. Her küme kendisinin bir alt kümesidir. Bir kümenin kendisi hariç alt kümelerine, o kümenin öz (has) alt kümeleri denir. Eleman sayısı n olan bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ dir.
- A ve B kümelerinin simetrik farkı $A \Delta B$ ile gösterilir ve $A \setminus B$ kümesi ile $B \setminus A$ kümesinin birleşiminden oluşur. $A \Delta B$ kümesinin eleman sayısı, A kümesi ile B kümesinin eleman sayılarının toplamından $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı çıkarılarak bulunur.
- Üzerinde çalıştığımız en geniş kümeye evrensel küme denir ve E harfi ile gösterilir. İki kümenin birleşimi, kesişimi, farkı için sırasıyla "$\cup$, $\cap$, $\setminus$" sembolleri kullanılır. Bir A kümesine ait olmayan fakat evrensel kümeye ait olan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A^t ile gösterilir. Aynı zamanda $A^t = E \setminus A$ dır. Ayrıca $E^t = \emptyset$ ve $\emptyset^t = E$ dir. Bir kümenin tümleyeninin tümleyeni yine kendisine eşittir. İki kümenin birleşimlerinin ve arakesitlerinin tümleyenleri için De Morgan kuralı kullanılır.
- Boş olmayan A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı $A \times B$ ile gösterilir ve (a, b) şeklindeki sıralı ikililerden oluşur. A boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere A^3, A^4,..., A^n nin elemanlarına sırasıyla sıralı üçlü, sıralı dörtlü ve sıralı n-li denir. Genellikle $A \times B \neq B \times A$ dır. Yani iki kümenin kartezyen çarpımının değişme özelliği yoktur. $A \times B$ nin $B \times A$ ya eşit olması için $A = B$ olması gerekir. Herhangi bir kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısı, kartezyen çarpıma katılan bütün kümelerin eleman sayılarının çarpımına eşittir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1.



Şekildeki gibi A, B ve C kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi yukarıdaki taralı bölgeyi gösterir?

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $(A \setminus B) \cup C$
c) $(A \cup B) \setminus C$
d) $A \cup B \cup C$
e) $A \cap B \cap C$

2. $A = \{1, 2\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $A \setminus B = \{1\}$ ise B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{1, 2\}$
b) $\{1, 2, 3\}$
c) $\{2\}$
d) $\{2, 3, 4\}$
e) $\{2, 3, 4, 5\}$

3. A kümesinin alt kümelerinin sayısı 64 olduğuna göre bu kümenin eleman sayısı kaçtır?

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

4. $E = \{a, b, c, k, 7, 9\}, A = \{b, k, 9\}$ ve $B = \{a, c, k, 9\}$ olduğuna göre $A^t \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{a, c\}$
b) $\{a, c, 7\}$
c) $\{c, 7, 9\}$
d) $\{a, c, k, 9\}$
e) $\{c, k, 9\}$

5. A ve B iki küme olsun. $s(A) = 2.s(B), s(A \cap B) = 4$ ve $s(A \setminus B) = 10$ ise $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
   a) 10
   b) 11
   c) 13
   d) 17
   e) 20

6. Matematik, Türkçe ve İngilizce derslerini alan öğrencilerden oluşan bir sınıfta, üç dersi de alan 5, matematik ve Türkçe dersini alan 8, matematik ve İngilizce dersini alan 7, Türkçe ve İngilizce dersini alan 9 öğrenci vardır. Matematik dersini alan 21, Türkçe dersini alan 32 ve İngilizce dersini alan 36 öğrenci olduğuna göre bu sınıfta kaç öğrenci vardır?
   a) 33
   b) 55
   c) 65
   d) 70
   e) 80

7. A, B ve C boş olmayan birer küme olmak üzere aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?
   a) $A \cap \emptyset = \emptyset$
   b) $A \subset (A \cup B)$
   c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   d) $A \cap B \subset A \cup B$
   e) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C$

8. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \times B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?
   a) 7
   b) 8
   c) 10
   d) 12
   e) 15

9. Aşağıdakilerden hangisi 8. Soruda verilen $A \times B$ kümesinin elemanlarından biri değildir?
   a) $(a, 1)$
   b) $(c, 3)$
   c) $(b, 2)$
   d) $(b, 4)$
   e) $(2, a)$

10. A, B ve C birer küme olmak üzere;
   I. $A = B$ ise $A \times B = B \times A$'dır.
   II. $s(A \times B) = s(B \times A)$'dır.
   III. $A \cup B = A$ ise $A \cap B = \emptyset$'dir.

   ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?
   a) Yalnız I
   b) Yalnız II
   c) Yalnız III
   d) I ve II
   e) II ve III

Cevap Anahtarı

1.e, 2.e, 3.c, 4.a, 5.d, 6.d, 7.e, 8.d, 9.e, 10.d

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Balcı, M. (2012). “Matematik Analiz-1”. Sürat Üniversite Yayınları.

[2] Bartle G. R., Sherbert R. D. (2011). “Introduction to Real Analysis”. John Wiley and Sons, Inc. 4. Baskı.

[3] Bayraktar, M., (2010). “Analiz”. Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti. Yayın No: 1601, ISBN 978-605-395-412-5.

[4] Kadıoğlu, E., Kamali, M. (2013). “Genel Matematik”. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, 8. Baskı.

[5] Küçük, Y., Üreyen M., Orhon N., Şenel M., Özer O., Azcan H., (2002). “Genel Matematik”. Anadolu Üniversitesi Yayını, 2. Baskı.

SAYILAR

İÇİNDEKİLER

- Sayı Kümeleri
- Reel Sayılarda Sıralama Özellikleri
- Reel Sayılar Kümesinde Aralık Kavramı
- Mutlak Değer
- Üslü ve Köklü Sayılar

HEDEFLER

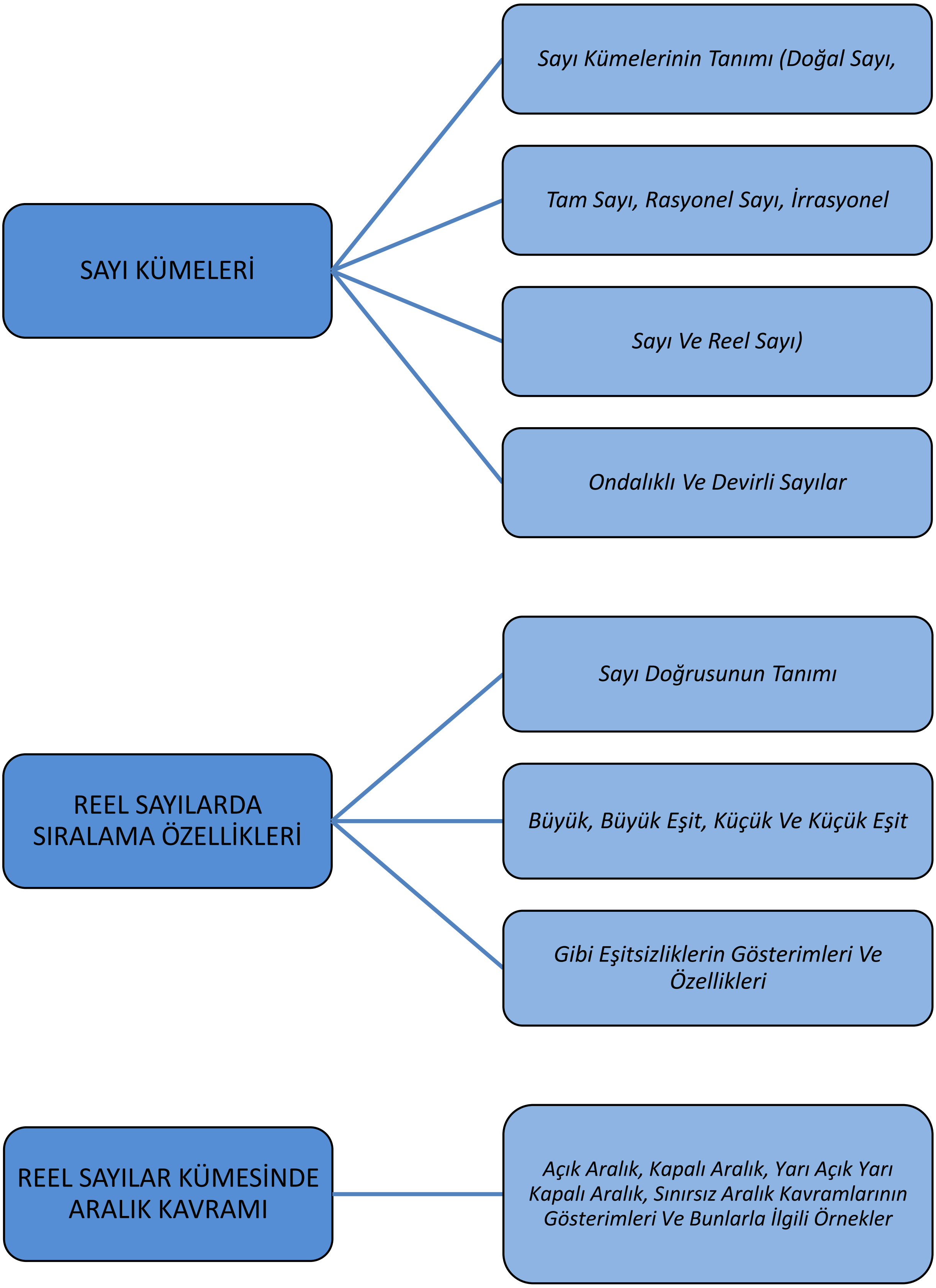
- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Sayı kümelerini tanımlayabilecek,
  - Sayılar arasında sıralama yapabilecek,
  - Aralıkları geometrik olarak gösterebilecek,
  - Herhangi bir sayının mutlak değerinin neye eşit olduğunu söyleyebilecek ve mutlak değerle ilgili işlemleri yapabilecek,
  - Üslü ve köklü sayılarla işlem yapabileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Doç. Dr.
İsa YILDIRIM

ÜNİTE 2


SAYI KÜMELERİ
Sayı Kümelerinin Tanımı (Doğal Sayı,
Tam Sayı, Rasyonel Sayı, İrrasyonel
Sayı Ve Reel Sayı)
Ondalıklı Ve Devirli Sayılar
REEL SAYILARDA SIRALAMA ÖZELLİKLERİ
Sayı Doğrusunun Tanımı
Büyük, Büyük Eşit, Küçük Ve Küçük Eşit
Gibi Eşitsizliklerin Gösterimleri Ve Özellikleri
REEL SAYILAR KÜMESİNDE ARALIK KAVRAMI
Açık Aralık, Kapalı Aralık, Yarı Açık Yarı Kapalı Aralık, Sınırsız Aralık Kavramlarının Gösterimleri Ve Bunlarla İlgili Örnekler

GİRİŞ

Sayıların kökenleri büyük bir gizeme sahiptir. Ancak, zamanla medeniyetlerin ilerlemiş olması ve buna paralel olarak toplumların onsuz gelişemeyeceğini söylemek de son derece önemlidir. İlkel topluluklarda yaşayan insanlar ellerinde bulunan nesnelerin azalıp azalmadığını anlamak için ve avladıkları hayvanların sayısını belirtmek için yaşadıkları mağara duvarlarına veya bir ağaç dalına kesici bir aletle bir çizik veya çentik atarlardı. Tabii ki o zamanda bu insanlar bir sayı sistemi kavramına sahip olmadıklarından, bazen bu işi her bir nesneyi bir çakıl taşıyla eşleştirerek yaparlardı. Böylece istedikleri zaman bu çizikleri, çentik veya çakıl taşları ile karşılaştırarak, ellerindeki nesnelerde azalma ve artmanın olup olmadığını kontrol ederlerdi. O dönemde kullanılan çizik, çentik veya çakıl taşları bugün kullandığımız sayı sisteminin ilkel bir biçimi olarak görülebilir. Bu gelişmeler aritmetiğin ötesine geçme eğilimi göstermiş ve bununla birlikte yazma fikri de ortaya çıkmıştır. Mısırlılar farklı sayılar için farklı semboller icat eden ilk uygarlıktı. Sadece bir çizgi olan bir sembolü vardı. On sembolü bir ipti. Yüzün sembolü bir halat bobini idi. Ayrıca bin ve on bin için de sayıları vardı. Mısırlılar bir milyonu hayal eden ilk topluluk oldular. Mısır'da eğitim gören ve daha sonra Yunanistan'a dönen Pisagor tek ve çift sayıları düşünen ilk matematikçidir. Pisagor, tek sayıları erkeklerle ve çift sayıları kadınlarla eşleştirmiştir.

Bugünkü sayılar Hindu-Arap sayıları olarak adlandırılır ve $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ve 0 rakamlarının bir kombinasyonudur. Bu rakamlar XII. yüzyılda İtalyan matematikçi Leonardo Pisano tarafından ifade edilmiştir. L. Pisano, Kuzey Afrika'da eğitim görmüş ve burada daha sonra popüler Hindu-Arap rakamlarını İtalya'ya taşımıştır. Hindu-Arap rakam sistemini benimsemeden önce insanlar, aslında Etrüsk Dönemi'nin mirası olan Roma figürlerini kullandılar. Bu figürler ise Roma rakamı sistemine dayanmaktadır.

Daha sonra ihtiyaçlar doğrultusunda sayı kavramı gelişmiş ve farklı sayı kümeleri tanımlanmıştır.

SAYI KÜMELERİ

Bu bölümde, daha sonraki ünitelerde de kullanılacak olan sayı kümelerinin tanımları verilecek ve bunların gösterimlerinden bahsedilecektir. Bu sayı kümeleri sırasıyla doğal sayılar, tam sayılar (pozitif tam sayılar ve negatif tam sayılar), rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve reel sayılardır.

Sıfır, sayma sayılar kümesinin elemanı değildir.

Tanım 2.1. Bir çokluğu belirtmek veya bir şeyleri saymak için kullanılan ve rakam adı verilen $0, 1, 2, \dots, 8, 9$ sembolleri ile yazılabilen sayıların tümüne doğal sayılar kümesi denir. Doğal sayılar kümesi;

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

şeklinde gösterilir.

Örneğin, $5,\ 100,\ 1000,\ 5000$ sayılarının her biri birer doğal sayı iken $\frac{1}{2}, -5, \sqrt{2}$ sayıları birer doğal sayı değildir.

Doğal sayılar kümesinden 0 (sıfır) sayısının çıkarılmasıyla elde edilen

$$\{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

kümesine, *sayma sayıları kümesi* denir.

Tanım 2.2. $\mathbb{N}$ kümesindeki her bir elemanın ters işaretlilerinin (negatif $(-)$) ve sıfırın eklenmesiyle oluşan sayı kümesine tam sayılar kümesi denir. Tam sayılar kümesi;

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

şeklinde gösterilir.

Örneğin, $0,\ 5, -7$ sayıları birer tam sayı iken $\frac{1}{2},\ \sqrt{5}$ sayıları birer tam sayı değildir.

Pozitif ve negatif sayıları birbirinden ayırmak için önüne “$+$” veya “$-$“ işareti konulur. Fakat pozitif sayılar genellikle “$+$” işareti kullanılmadan da gösterilir.

Sıfır bir tam sayı olmasına rağmen ne pozitif tam sayılar kümesine ne de negatif tam sayılar kümesine dâhildir.

Tam sayılar kümesinin gösteriminden de fark edilebileceği gibi tam sayılar kümesi, pozitif tam sayılar ve negatif tam sayılar kümesi diye iki kısma ayrılır. Pozitif tam sayılar kümesi;

$$\mathbb{Z}^+ = \{\, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

ve negatif tam sayılar kümesi de;

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -n, \dots, -2, -1\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca tam sayılar kümesi, bu kümelerin birleşimi olarak;

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

şeklinde de gösterilebilir [1].

Örnek

- İki basamaklı en büyük pozitif tam sayı ile iki basamaklı en küçük pozitif tam sayının toplamı kaçtır?

Çözüm: İki basamaklı en büyük pozitif tam sayı 99 ve iki basamaklı en küçük pozitif tam sayı 10 olduğundan bu iki sayının toplamı $99 + 10 = 109$’dur.

Not: $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ veya a/b şeklindeki iki tam sayının oranına *kesir* denir. a ‘ya kesrin payı, b ‘ye de kesrin paydası denir.

Tanım 2.3. Paydadaki tam sayı sıfırdan farklı olmak şartıyla herhangi iki tam sayının birbirine oranı olarak tanımlanan sayıların kümesine rasyonel sayılar kümesi denir ve

$$\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0\right\}$$

şeklinde gösterilir.

Buna göre $\frac{3}{5}, -\frac{7}{2}, 10, -5, 0$ sayılarının her biri birer rasyonel sayıdır fakat $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$ gibi sayılar birer rasyonel sayı değildir.

Bu tanımdan da görüleceği gibi sıfırın, sıfır hariç herhangi bir sayıya bölümü sıfırdır. Yani, $\frac{0}{1} = 0, \frac{0}{-10} = 0$ 'dır. Fakat sıfırın sıfıra bölümü belirsizdir. Yani $\frac{0}{0}$ 'ın belirli bir değeri yoktur.

Rasyonel sayılar kümesinin tanımına göre her tam sayı paydası 1 olan bir rasyonel sayıdır. Yani, $\frac{a}{b}$ ifadesinde $b = 1$ olarak alınırsa bir tam sayı elde edilir. Dolayısıyla her tam sayı $\frac{a}{b}$ şeklinde ifade edilebileceği için bir rasyonel sayıdır. Aynı zamanda her doğal sayı da bir tam sayı olduğuna göre yukarıda tanımlanan kümeler arasında;

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

şeklinde bir kapsam bağıntısı vardır.

Bir rasyonel sayının payının paydasına bölünmesiyle elde edilen sayıya, verilen rasyonel sayının ondalık yazılımı denir. Her rasyonel sayının sonlu veya sonsuz bir ondalık yazılımı vardır. Örneğin,

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots, \frac{1}{2} = 0{,}5\,, \frac{1}{6} = 0{,}16666 \ldots \text{ dır.}$$

Tanım 2.4. Bir rasyonel sayının ondalıklı gösteriminde sayının virgülden sonraki herhangi bir kısmı sürekli tekrar ediyorsa bu tür sayılara devirli ondalık sayı denir. Böyle sayılar tekrar eden (veya devreden) sayının üstüne bir çizgi çizilerek;

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots = 0{,}\overline{3}\,, \frac{1}{6} = 0.16666 \ldots = 0{,}1\overline{6}$$

şeklinde gösterilebilir.

Şimdi devirli ondalıklı olarak verilmiş bir sayının nasıl $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabileceğini görelim.

Örnek

•Ondalık açılımı $0,\overline{12}$ olan sayıyı $\frac{a}{b}$ biçiminde yazınız.

Çözüm: Aslında pratik olarak yapılacak olan işlem şudur: Verilen devirli ondalıklı sayının virgülden sonra devreden basamak sayısı kadar 10 sayısının kuvvetleri ile çarpılır (burada devreden basamak sayısı iki olduğundan bu sayı 100 ile çarpılacaktır) ve bulunan sayıdan ilk sayı çıkarılır. Yani;

$$x = 0,\overline{12}$$

olsun. Buradan

$$100x = 12,\overline{12}$$

$$x = 0,\overline{12}$$

$$99x = 12$$

$$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

bulunur.

Bu soruyu çözerken kullanılan yöntemin kısa formu;

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sayının tamamı} - \text{devretmeyen kısım}}{\underbrace{\text{devreden kadar 9 devretmeyen kadar 0}}_{\text{virgülden sonra}}}$$

şeklindedir. Aynı soru bu yöntem yardımıyla çözülürse

$$\frac{a}{b} = \frac{12 - 0}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

olur.

Örneğin, ondalık açılımı $1,3\overline{12}$ olan bir sayı için sayının tamamı 1312, devretmeyen kısım 13 olarak alınır ve yukarıda verilen formül kullanılarak bu sayı $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılır.

Not: Her ondalıklı sayı bir rasyonel sayı olmayabilir. Örneğin,

$$e = 2,718281828459 \ldots \text{ ve } \pi = 3,141592653589 \ldots$$

sayılarının bir rasyonel sayı olmadığı yukarıdaki tanımlardan da görülür.

Bireysel Etkinlik

- $\frac{14}{3}$ sayısına karşılık gelen ondalık sayıyı ve $15,\overline{16}$ sayısına karşılık gelen rasyonel sayıyı bulunuz.

Tanım 2.5. a ve b birer tamsayı ve $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara irrasyonel sayı denir.

İrrasyonel sayılar kümesinin gösterimi için standart bir sembol yoktur. Fakat $\mathbb{Q}^t$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ veya $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sembollerinden birisi ile gösterilebilir.

Buna göre $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{7}$ vb. sayılar birer irrasyonel sayıdır.

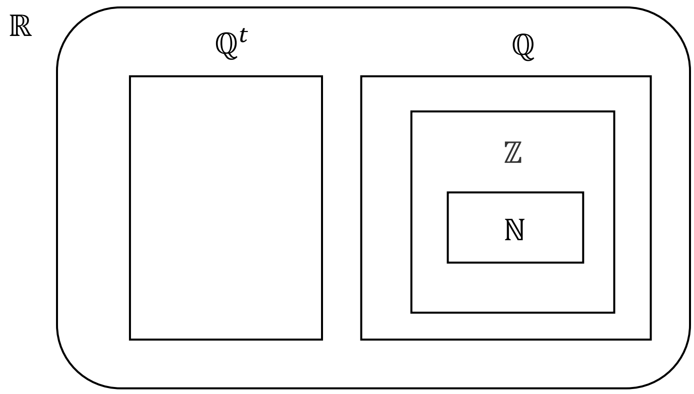
Tanım 2.6. Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi olan kümeye reel (gerçel) sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^t$ dir.

Bu kitapta, *üzerinde çalışacağımız en geniş sayı kümesi reel sayılar kümesidir.* Buraya kadar verilen sayı kümeleri arasındaki bağıntı tekrar gözden geçirilecek olunursa

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

olur. Bu bağıntı, aşağıdaki şekil yardımıyla da ifade edilebilir.

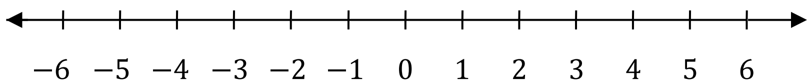


Şekil 2.1. Sayı kümeleri arasındaki bağıntının şematik olarak gösterilişi

REEL SAYILARDA SIRALAMA ÖZELLİKLERİ

Matematik, genellikle soyut bir bilim dalı olduğu için matematikteki kavramların geometrik olarak ifade edilmesi, konunun anlaşılması açısından büyük bir öneme sahiptir. Dolayısıyla reel sayılar geometrik olarak ifade edilirken bir doğru çizilir ve tüm reel sayılar bunun üzerinde gösterilir. Bunun için bir başlangıç noktası alınır ve bu 0 (sıfır) ile gösterilir. Bu noktanın sağ tarafı pozitif reel sayıları ve sol tarafı da negatif reel sayıları temsil etmek üzere tüm reel sayılar

Başlangıç noktasına aynı zamanda "orjin" de denilir.



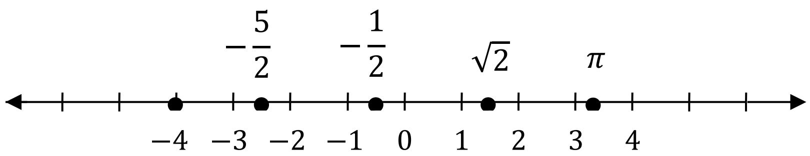
Şekil 2.2. Sayı doğrusu

şeklinde gösterilir. Buna *sayı doğrusu veya reel eksen* de denir. Şekil 2.2' den de görülebileceği gibi başlangıç noktası sayı doğrusunu iki eş parçaya böler.

Örnek

• $\sqrt{2}, \pi, -\frac{1}{2}, -4$ ve $-\frac{5}{2}$ sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Çözüm: $\sqrt{2} \cong 1{,}412$, $\pi \cong 3{,}14$, $-\frac{1}{2} = -0{,}5$ ve $-\frac{5}{2} = -2{,}5$ olduğundan bu sayıları sayı doğrusu üzerinde



şeklinde gösterilir.

"$\cong$" sembolü "yaklaşık olarak" anlamına gelir. π nin yaklaşık olarak değeri 3,14'tür ($\pi \cong 3{,}14$).

Not: Sayı doğrusu üzerindeki her noktaya bir reel sayı ve her reel sayıya ise sayı doğrusu üzerinde bir nokta karşılık gelir.

Tanım 2.7. Sayı doğrusu üzerinde $a \neq 0$ reel sayısı verilsin. Bu durumda a sayısı ya sıfırın sağında ya da solunda bulunur. Eğer a sıfırın sağında yer alıyorsa a'ya pozitif sayı, sıfırın solunda yer alıyorsa a'ya negatif sayı denir. Eğer a sayısı pozitif ise $a > 0$ yazılır ve "a büyüktür sıfır" diye okunur, eğer a sayısı negatif ise $a < 0$ yazılır ve "a küçüktür sıfır" diye okunur.

Bu tanımdan hareketle herhangi iki reel sayı arasındaki karşılaştırmanın tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.8. Sayı doğrusu üzerinde a ve b reel sayıları verilsin. Eğer a sayısı b sayısının solunda yer alıyorsa a sayısı b sayısından küçüktür denir. $a < b$ yazılır ve "a küçüktür b" diye okunur. Eğer a sayısı b sayısının sağında yer alıyorsa bu durumda a sayısı b sayısından büyüktür denir. $a > b$ yazılır ve "a büyüktür b" diye okunur.

Örnek

•$2 < 3, 4 < 7, -1 > -5$ ve $-4 > -6$ 'dır.

Tanım 2.9. a ve b reel sayıları verilsin. Eğer $a = b$ veya $a < b$ ise $a \leq b$ yazılır ve "a küçük eşit b" şeklinde okunur. Benzer şekilde eğer $a = b$ veya $a > b$ ise $a \geq b$ yazılır ve "a büyük eşit b" şeklinde okunur.

Örnek

•Aşağıda verilen reel sayıları sıralayınız?

a) $\pi, \sqrt{2}, \frac{5}{2}, 3$ **b)** $-2, -3, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$

Çözüm:

a) π nin yaklaşık değeri 3,14 ve $\sqrt{2}$ nin yaklaşık değeri 1,41 olduğundan

$$\sqrt{2} < \frac{5}{2} < 3 < \pi$$

olur.

b) $-\frac{5}{2} = -2{,}5$ ve $-\frac{7}{2} = -3{,}5$ olduğundan;

$$-\frac{7}{2} < -3 < -\frac{5}{2} < -2$$

dir.

Yukarıda tanımlanan $a < b, a > b, a \leq b$ ve $a \geq b$ gibi ifadelere *eşitsizlik* denir. Eşitsizlikler konusu 5. Ünite'de ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Not: a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere;

$$a = b \;\text{ veya }\; a < b \;\text{ veya }\; a > b$$

ifadelerinden yalnız biri doğrudur.

Reel sayılar üzerinde tanımlanan sıralama ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir. a, b, c ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$
- $a < b$ ise $a + c < b + c$
- $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$
- $a < b$ ve $c > 0$ ise $a.c < b.c$
- $a < b$ ve $c < 0$ ise $a.c > b.c$
- $a < b$ ve $c > 0$ ise $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- $a < b$ ve $c < 0$ ise $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- $0 < a < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- $a^2 < a$ ise $0 < a < 1$, $a^2 > a$ ise $a < 0$ veya $a > 1$'dir.

ARALIKLAR

Aralıklar, küme olarak reel sayıların bir alt kümesi, geometrik olarak da sayı doğrusunun bir parçasıdır. Aralıklar, uç noktalarının kümeye dâhil olup olmama durumuna göre aşağıdaki gibi isimlendirilirler. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun.

1)

$$(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

kümesine, a, b *açık aralığı denir ve* (a, b) *ile gösterilir.*

Bu küme geometrik olarak;

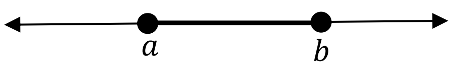
şeklinde gösterilir. a ve b noktaları, bu aralığın uç noktalarıdır. *Burada uç noktalar kümeye veya aralığa dahil değildir.* Yani bu küme, a ve b arasındaki reel sayılardan oluşur.

2)

$$[a,b]=\{x: x\in\mathbb{R}, a\leq x\leq b\}$$

kümesine, a,b *kapalı aralığı denir ve* $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *ile gösterilir.*

Bu küme geometrik olarak;



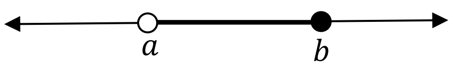
şeklinde gösterilir. *Aralığın uç noktaları olan* a ve b*, bu kümeye dâhildir.*

3)

$$(a,b]=\{x: x\in\mathbb{R}, a< x\leq b\}$$

kümesine, soldan açık sağdan kapalı aralık veya yarı açık yarı kapalı aralık denir ve $(\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *ile gösterilir.*

Bu küme geometrik olarak;



şeklinde gösterilir. *Aralığın uç noktaları olan* a *kümeye dâhil değilken* b*, bu kümeye dâhildir.*

4)

$$[a,b)=\{x: x\in\mathbb{R}, a\leq x< b\}$$

kümesine, soldan kapalı sağdan açık aralık veya yarı kapalı yarı açık aralık denir ve $[\mathrm{a},\mathrm{b})$ *ile gösterilir.*

Bu küme de geometrik olarak;

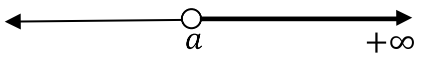
şeklinde gösterilir. *Aralığın uç noktaları olan* a *kümeye dâhil iken* b*, bu kümeye dahil değildir.*

Not: Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı gibi sayı doğrusu üzerindeki bir noktanın içi boş olarak alınmışsa; bu noktanın kümeye veya aralığa dâhil olmadığını, içi dolu olarak alınmışsa bu noktanın aralığa dâhil olduğunu gösterir.

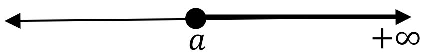
Aralıkların uç noktalarından biri veya ikisi bir reel sayı olmayıp $+\infty$ veya $-\infty$ olabilir. Burada her reel sayıdan büyük olan sembol $+\infty$ ile gösterilir ve "artı sonsuz" diye okunur. Benzer şekilde her reel sayıdan küçük olan sembol $-\infty$ ile gösterilir ve "eksi sonsuz" diye okunur. Bu tür aralıklara *sonsuz veya sınırsız aralıklar* denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır. $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$+\infty$ ve $-\infty$ birer reel sayı değil sadece birer semboldür.

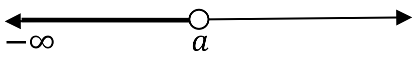
$$(a,+\infty)=\{x: x\in\mathbb{R}, a<x\}$$



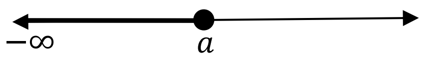
$$[a,+\infty)=\{x: x\in\mathbb{R}, a\leq x\}$$



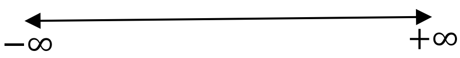
$$(-\infty,a)=\{x: x\in\mathbb{R}, x<a\}$$



$$(-\infty,a]=\{x: x\in\mathbb{R}, x\leq a\}$$



şeklinde gösterilir. Eğer $(-\infty,+\infty)$ aralığını alırsak bu aralık tüm $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini ifade eder ve;



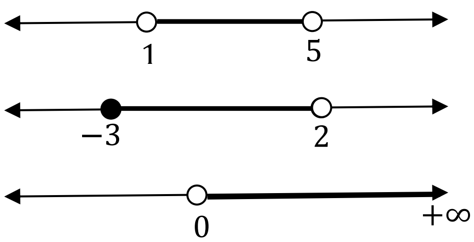
şeklinde gösterilir. Yukarıdaki sonsuz aralık tanımlarından görüleceği gibi $-\infty$ veya $+\infty$ birer reel sayı olmadığı için kapalı aralık içinde gösterilmez.

Örnek

- a) $(1,5)$, $[-3,2)$ ve $(0,+\infty)$ aralıklarını sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.
- b) $[-3,4]\cup(-1,8)$ ve $(-1,1)\cap[-2,5]$ kümelerini yazınız.
- c) $\left\{x: x\in\mathbb{R}, -\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{9}{2}\right\}$ kümesinde bulunan en küçük tamsayı kaçtır?

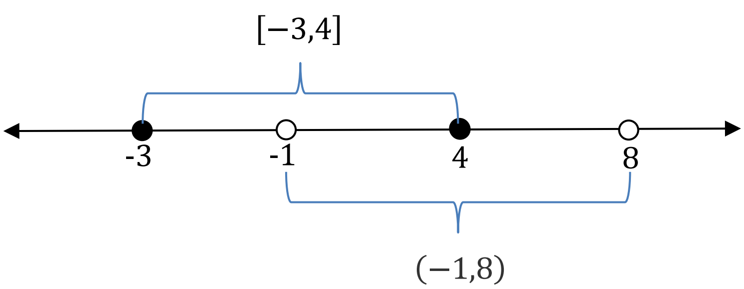
Çözüm:

a) Bu aralıklar sırasıyla sayı doğrusu üzerinde;



şeklinde gösterilir.

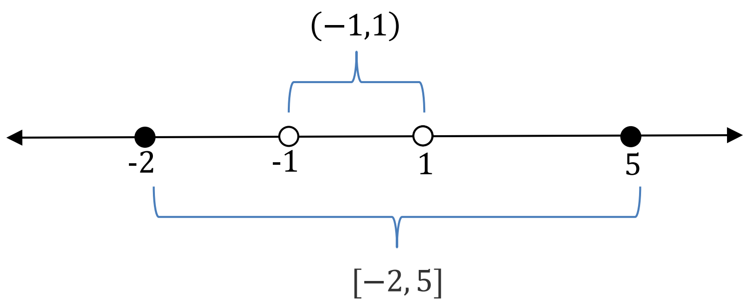
b) Önce $[-3,4]\cup(-1,8)$ kümesini bulalım. Bu aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösterecek olursak



şeklinde olur. $[-3,4] \cup (-1,8)$ kümesi hem $[-3,4]$ hem de $(-1,8)$ aralığına ait elemanlardan oluşan küme olduğundan şekilden de görüleceği gibi

$$[-3,4] \cup (-1,8) = [-3,8)$$

olur. Benzer şekilde şimdi de $(-1,1) \cap [-2,5]$ kümesini gösterelim. Bu küme geometrik olarak;



şeklinde gösterilir. $(-1,1) \cap [-2,5]$ kümesi, $(-1,1)$ ve $[-2,5]$ aralıklarının arakesiti olduğundan şekilden de görüleceği gibi bu iki aralığın arakesiti $(-1,1)$ aralığıdır. Dolayısıyla;

$$(-1,1) \cap [-2,5] = (-1,1)$$

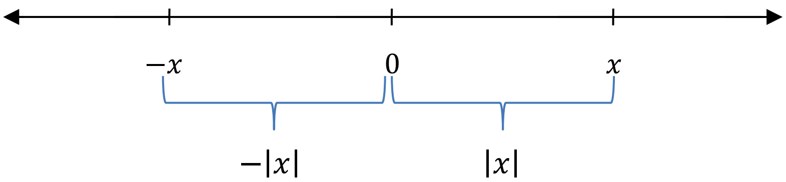
dir.

c) $\left\{x : x \in \mathbb{R}, -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}\right\}$ kümesi aynı zamanda $[-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}]$ aralığına eşittir. Bu aralık $-2{,}5$ ile $4{,}5$ arasındaki reel sayılardan oluşur. Bu durumda bu aralıktaki en küçük tam sayı -2 dir.

MUTLAK DEĞER

Tanım 2.10. Reel sayı doğrusundaki herhangi bir sayının başlangıç noktasına (yani sıfıra) olan uzaklığına o sayının mutlak değeri denir.

Bir x sayısının mutlak değeri $|\mathrm{x}|$ ile gösterilir ve “x ‘in mutlak değeri” veya “mutlak değer x” diye okunur.



Şekil 2.3. Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri

Uzaklık hiçbir zaman negatif olamayacağından bir sayının mutlak değeri de hiçbir zaman negatif olamaz. Yani x ister pozitif ister negatif olsun $|\mathrm{x}|$ *daima pozitiftir.* Bunu aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| = |-x|$ dir.

şeklinde ifade edilir. Yani mutlak değer içerisindeki sayı pozitif veya sıfır ise mutlak değer dışına aynen, negatif ise mutlak değer dışına işaret değiştirerek çıkar. Örneğin, $|2| = 2$, $|0| = 0$, $|-4| = 4$’tür.

Örnek

• $a < b < 0 < c$ olduğuna göre $|a-b| + |c-b| - |a-c|$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $a < b$ ise $a - b < 0$ olup $|a-b| = -(a-b) = -a+b$ dir. $c > b$ ise $c - b > 0$ ‘dır. Yani $|c-b| = c-b$ ‘dir. Son olarak $a < c$ ise $a - c < 0$ olup $|a-c| = -(a-c) = -a+c$ dir. Bunlar istenen ifadede yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
|a-b| + |c-b| - |a-c| &= -a+b+c-b-(-a+c) \\
&= -a+b+c-b+a-c \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur.

Mutlak değerle ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için;

1) $-|x| \le x \le |x|$
2) $|x-y| = |y-x|$
3) $|x+y| \le |x| + |y|$ (Üçgen eşitsizliği)
4) $|x.y| = |x|.|y|$
5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \ne 0)$

Yukarıdaki özelliklere ek olarak, genellikle eşitsizlik çözümlerinde kullanılan aşağıdaki özellikler de verilebilir. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ için;

1) $|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ ‘dır.
2) $|x| < a$ ise $-a < x < a$ ‘dır.
3) $|x| > a$ ise $x > a$ veya $x < -a$ ‘dır [2].

Örnek

• $|3x - 3| = 6$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz?

Çözüm: $|3x-3|=6$ ise yukarıdaki 1. özellikten $3x-3=6$ veya $3x-3=-6$ olur. Buradan;

$$3x-3=6 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

ve

$$3x-3=-6 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$$

bulunur.

Örnek

• $|2x-5|<11$ eşitsizliğini çözünüz?

Çözüm: $|2x-5|<11$ ise yukarıdaki 2. özellikten;

$$-11<2x-5<11 \Rightarrow -11+5<2x<11+5$$

$$\Rightarrow -6<2x<16$$

$$\Rightarrow -3<x<8$$

elde edilir. Yani bu eşitsizliğin çözümü -3 ile 8 arasındaki tüm reel sayılardır. Bu çözüm, aralık yardımıyla $(-3,8)$ şeklinde gösterilir.

Örnek

• $|2x-1|>3$ eşitsizliğini çözünüz?

Çözüm: $|2x-1|>3$ ise yukarıdaki 3. özellikten dolayı $2x-1>3$ veya $2x-1<-3$ yazılır.

$$2x-1>3 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2$$

ve

$$2x-1<-3 \Rightarrow 2x<-2 \Rightarrow x<-1$$

elde edilir. Bu çözüm, aralık yardımıyla $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$ şeklinde gösterilir.

Örnek

• $|x-2|+|8-4x|=20$ ise x in alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

Çözüm: $|x-2|+|4(2-x)|=20 \Rightarrow |x-2|+|4||2-x|=20$

$$\Rightarrow |x-2|+4.|x-2|=20$$

$$\Rightarrow 5.|x-2| = 20$$

$$\Rightarrow |x-2| = 4$$

olur. $|x-2| = 4$ ise $x-2=4$ ve $x-2=-4$ ‘dür. Yani $x=6$ veya $x=-2$ olup x in alabileceği değerler çarpımı $6.(-2)=-12$ ‘dir.

0^0 ifadesi bir belirsizliktir.

ÜSLÜ VE KÖKLÜ SAYILAR

Bu bölümde, üslü ve köklü sayılar ele alınıp bunların özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 2.11. $a \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$\underbrace{a.a \ldots a}_{\text{m tane}} = a^m$$

şeklinde m tane a sayısının çarpımı olan a^m sayısına “a nın m-inci kuvveti” denir. a^m ifadesindeki a ‘ya taban, m ‘ye ise üs (ya da kuvvet) denir [4].

Not: Yukarıdaki tanıma dikkat edilirse reel sayıların pozitif kuvvetleri tanımlıdır. Fakat $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca sıfırdan farklı her reel sayının sıfırıncı kuvveti 1 dir yani

$$a^0 = 1$$

olur.

Buna göre;

$$2^3 = 2.2.2 = 8,$$

$$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16,$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$5^0 = 1$’dir.

Not: Negatif bir sayının çift kuvveti pozitif, tek kuvveti ise negatiftir. Örneğin, $(-2)^2 = 4$ ve $(-2)^3 = -8$ dir.

Üslü sayılarla ilgili diğer özellikler aşağıdaki gibi verilebilir. a ve b sıfırdan farklı reel sayılar ve m ve n de birer tam sayı olmak üzere;

1) $a^m.a^n = a^{m+n}$
2) $(a^m)^n = a^{m.n}$
3) $(a.b)^m = a^m.b^m$
4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$'dir [3].

Örnek

•Aşağıdaki işlemleri yapınız?

a) $2^5.2^3$ **b)** $(3^{-3})^{-2}$ **c)** $(3^2.2)^2$

d) $\frac{5^6}{5^3}$ **e)** $\left(\frac{5}{125}\right)^{-2}$

Çözüm: Bu soruları çözerken sırasıyla üstte verilen altı kural kullanılırsa,

a) $2^5.2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 2.2.2.2.2.2.2.2 = 256$

b) $(3^{-3})^{-2} = 3^{(-3).(-2)} = 3^6 = 3.3.3.3.3.3 = 729$

c) $(3^2.2)^2 = (3^2)^2.2^2 = 3^4.2^2 = 81.4 = 324$

d) $\frac{5^6}{5^3} = 5^{6-3} = 5^3 = 5.5.5 = 125$

e) $\left(\frac{5}{125}\right)^{-2} = \left(\frac{125}{5}\right)^{2} = (25)^2 = 25.25 = 625$

olur.

Örnek

•$2^{2x-3} = 128$ ise x kaçtır?

Çözüm: $2^{2x-3} = 128$ ifadesi $2^{2x-3} = 2^7$ şeklinde yazılabilir. Buradan $2x - 3 = 7$ olur. Dolayısıyla $2x = 10$ olup $x = 5$ 'tir.

Örnek

•$5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 31.5^{3x}$ ise x kaçtır?

Çözüm: Verilen denklem;

$$5^x + 5^x.5 + 5^x.5^2 = 31.5^{3x}$$

şeklinde yazılabilir. Üstteki ifadenin sol tarafı 5^x ortak parantezine alınırsa;

$$5^x(1 + 5 + 25) = 31.5^{3x}$$

$$5^x.31 = 31.5^{3x}$$

olur. Buradan;

$$5^x = 5^{3x}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için

$$x = 3x$$

olacağından $x = 0$ elde edilir.

Örnek

• $\frac{2^x+2^x+2^x+2^x}{4^x+4^x} = \frac{1}{16}$ ise x kaçtır?

Çözüm: $\frac{2^x+2^x+2^x+2^x}{4^x+4^x}=\frac{1}{16}$ ifadesi $\frac{4.2^x}{2.4^x}=\frac{1}{16}$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\frac{4.2^x}{2.4^x}=\frac{1}{16}\Rightarrow\frac{2.2^x}{4^x}=\frac{1}{16}\Rightarrow\frac{2^x}{4^x}=\frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow\frac{4^x}{2^x}=32\Rightarrow\left(\frac{4}{2}\right)^x=32\Rightarrow 2^x=32$$

$\Rightarrow x=5$ olur.

Tanım 2.12. $a\in\mathbb{R}$ ve $m\geq 2$ bir tam sayı olmak üzere $\sqrt[m]{a}$ sayısına a nın m. kuvvetten veya dereceden kökü denir. $\sqrt[m]{a}$ sayısı aynı zamanda $a^{1/m}$ şeklinde de gösterilir.

Benzer olarak $a\in\mathbb{R}$ ve $m\geq 2$ bir tam sayı olmak üzere;

$x^m=a$ ise her iki tarafın $1/m$ kuvveti alınırsa $x=a^{1/m}=\sqrt[m]{a}$ olur [5].

$\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$ dır.

Eğer özel olarak $\sqrt[m]{a}$ ifadesinde $m=2$ alınırsa $\sqrt[2]{a}$ veya bunun yerine kısaca $\sqrt{a}$ yazılır. Bu ifade "karekök a", $m=3$ olarak alınırsa $\sqrt[3]{a}$ ifadesi "küp kök a" diye okunur. Ayrıca $\sqrt{a}$ ve $\sqrt[3]{a}$ sayıları yukarıdaki tanımdaki gibi sırasıyla a 'nın 2. dereceden kökü ve a nın 3. dereceden kökü diye de ifade edilir.

Not: Eğer $\sqrt[m]{a}$ köklü sayısında m çift sayı ise $a\geq 0$ olmalıdır. Örneğin, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$ sayıları birer reel sayı değildir.

Bu nottan da görülebileceği gibi *negatif sayıların karekökü veya çift kuvvetten kökleri yoktur. Sıfır ve pozitif sayıların çift kuvvetten kökleri vardır.* Örneğin, $\sqrt{0}=0, \sqrt{1}=1, \sqrt{36}=6, \sqrt[3]{8}=2, \sqrt[4]{81}=3$'tür.

Not: Eğer $\sqrt[m]{a}$ köklü sayısında m tek sayı ise $a\in\mathbb{R}$'dir. Örneğin, $\sqrt[3]{-64}=-4$, $\sqrt[5]{-32}=-2$, $\sqrt[7]{128}=2, \sqrt[9]{0}=0$ vb.

Köklü sayılarla ilgili aşağıdaki özellikler verilebilir. $a,b\in\mathbb{R}^+$ ve $m,n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

1) $\sqrt[m]{a^n}=a^{n/m}$
2) $\sqrt[m]{a.b}=\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}$
3) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$
4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$
5) $x.\sqrt[m]{a}\pm y.\sqrt[m]{a}=(x\pm y)\sqrt[m]{a}$ $(x,y\in\mathbb{R})$
6) $a^n.\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^{n.m}.b}$ 'dir.

Örnek

•Aşağıdaki işlemleri yapınız?

a) $\sqrt[3]{3^6}$ **b)** $\sqrt{25.144}$ **c)** $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$ **e)** $2.\sqrt{8}+5.\sqrt{128}-4.\sqrt{32}$ **f)** $3^2.\sqrt[3]{9}$

Çözüm: Yukarıdaki özellikler sırasıyla kullanılırsa,

a) $\sqrt[3]{3^6} = 3^{6/3} = 3^2 = 9$

b) $\sqrt{25.144} = \sqrt{25}.\sqrt{144} = \sqrt{5^2}.\sqrt{12^2} = 5^{2/2}.12^{2/2} = 5.12 = 60$

c) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5^{3/3}}{2^{3/3}} = \frac{5}{2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{6/6} = 2$

e) $2.\sqrt{8} + 5.\sqrt{128} - 4.\sqrt{32} = 2.\sqrt{4.2} + 5.\sqrt{64.2} - 4.\sqrt{16.2}$

$= 2.2.\sqrt{2} + 5.8.\sqrt{2} - 4.4.\sqrt{2}$

$= 4.\sqrt{2} + 40.\sqrt{2} - 16.\sqrt{2}$

$= (4 + 40 - 16)\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$

f) $3^2.\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^{2.3}.9} = \sqrt[3]{3^6.3^2} = \sqrt[3]{3^8} = 3^{8/3}$

elde edilir.

Not: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt{a^2} = |a|$ 'dır.

Örnek

- $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{\sqrt{625}}$ değerini bulunuz.

Çözüm: $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt[3]{(-2)^3} + |-2| + \sqrt{25}$

$= -2 + 2 + 5 = 5$

bulunur.

Bireysel Etkinlik

- Aşağıdaki işlemleri yapınız?

a) $\frac{\sqrt[3]{-27}+\sqrt{(-2)^4}}{\sqrt{(-4)^2}-\sqrt{(-2)^8}}$ **b)** $\sqrt[3]{3 + \sqrt{21 + \sqrt[3]{64}}}$

Özet

- Sayı kümeleri; doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve reel sayılar olmak üzere beş kısma ayrılır. Bu sayı kümeleri sırasıyla $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^t$ ve $\mathbb{R}$ şeklindeki sembollerle gösterilir. Ayrıca bu kümeler arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ şeklinde bir kapsam bağıntısı vardır. İrrasyonel sayılar, reel sayıların bir alt kümesidir fakat diğer kümelerle arasında bir bağlantı yoktur.
- Bir rasyonel sayının payının paydasına bölünmesiyle elde edilen sayıya, verilen rasyonel sayının ondalık yazılımı denir. Her rasyonel sayının sonlu veya sonsuz bir ondalık yazılımı vardır. Bir rasyonel sayının ondalıklı gösteriminde sayının virgülden sonraki herhangi bir kısmı sürekli tekrar ediyorsa bu tür sayılara devirli ondalık sayı denir. Böyle sayılar tekrar eden (veya devreden) sayının üstüne bir çizgi çizilerek gösterilir.
- Tüm reel sayılar, sayı doğrusu veya reel sayı ekseni denilen bir doğru üzerinde gösterilir. Bu doğru için bir başlangıç noktası alınır ve bu 0 (sıfır) ile gösterilir. Doğru üzerindeki her noktaya bir reel sayı ve her reel sayıya ise bir nokta karşılık gelir. Bu noktanın sağ tarafındaki terimler, pozitif reel sayıları ve sol tarafındakiler ise negatif reel sayıları temsil eder.
- Eşitsizlik adı verilen ve reel sayılar arasındaki sıralamada kullandığımız ifadeler "$<$, $>$, $\leq$, $\geq$" şeklindedir ve bunlar sırasıyla "küçük, büyük, küçük eşit, büyük eşit" şeklinde okunur. Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılır veya pozitif bir sayıya bölünürse eşitsizlik bozulmaz. Fakat negatif bir sayı ile çarpılır veya negatif bir sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.
- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ kümelerine aralık denir ve bunlar açık aralık, kapalı aralık ve yarı açık-yarı kapalı aralık olarak tanımlanır. Açık aralıklarda aralığın uç noktaları kümeye dâhil değilken, kapalı aralıklarda bu noktalar kümeye dâhildir. Ayrıca uç noktalardan biri veya her ikisi sonsuz ise bu tür aralıklara sınırsız veya sonsuz aralık denir. Örneğin, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ ve $(-\infty, +\infty)$ vb. $(-\infty, +\infty)$ aralığı aynı zamanda tüm $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini ifade eder.
- Reel sayı doğrusundaki herhangi bir sayının başlangıç noktasına olan uzaklığına o sayının mutlak değeri denir. Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri $|a|$ ile gösterilir ve "a nın mutlak değeri" veya "mutlak değer a" diye okunur. Mutlak değer içerisindeki hiçbir sayı mutlak değer dışına negatif olarak çıkamaz. Yani $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|a| \geq 0$ 'dır. Sıfırın mutlak değeri ise sıfırdır. Ayrıca $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt[2]{a^2} = |a|$ dır.
- $a \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere a^m sayısına "a sayısının m-inci kuvveti" denir. a^m ifadesindeki a 'ya taban, m 'ye ise üs veya kuvvet denir. $a^0 = 1$ ve $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ olarak tanımlanır.
- $a \in \mathbb{R}$ ve $m \geq 2$ bir tam sayı olmak üzere $\sqrt[m]{a}$ sayısına a 'nın m. dereceden kökü denir. $\sqrt[m]{a}$ sayısı aynı zamanda $a^{\frac{1}{m}}$ şeklinde de gösterilebilir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. En küçük pozitif tam sayı ile en büyük negatif tam sayının toplamı kaçtır?
   a) 0
   b) 1
   c) 2
   d) 3
   e) -1

2. $a = \frac{7}{3}, b = \frac{8}{5}, c = \frac{10}{4}$ sayılarının sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $a < b < c$
   b) $b < a < c$
   c) $c < a < b$
   d) $a < c < b$
   e) $b < c < a$

3. $[-5,4] \cap (-2,6)$ arakesit kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $[-5,4]$
   b) $(-2,6)$
   c) $[-2,6)$
   d) $(-2,4)$
   e) $(-2,4]$

4. $2,\overline{2}$ devirli sayısına karşılık gelen rasyonel sayı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{5}{9}$
   b) $\frac{10}{9}$
   c) $\frac{20}{9}$
   d) $\frac{22}{9}$
   e) $\frac{22}{90}$

5. $|5x - 5| = 20$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 2
   b) 5
   c) 10
   d) 12
   e) 15

6. $|x-2| \leq 4$ eşitsizliğinin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $[-2,6]$
   b) $(-2,6)$
   c) $[-4,4]$
   d) $(-4,4)$
   e) $(-2,4]$

7. $a^4.(-a)^2.(-a)^3$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) a^9
   b) a^5
   c) $(-a)^3$
   d) $(-a)^2$
   e) $-a^9$

8. $3^{x-1} = 2$ ise 9^x değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 4
   b) 36
   c) 25
   d) 18
   e) 3

9. $\sqrt{1,44} + \sqrt{0,0016} - \sqrt{0,04}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 0
   b) 10
   c) $\frac{18}{25}$
   d) $\frac{1}{25}$
   e) $\frac{26}{25}$

10. $\sqrt[3]{4+\sqrt{14+\sqrt{\sqrt[3]{64}}}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5

Cevap Anahtarı

1.a, 2.b, 3.e, 4.c, 5.a, 6.a, 7.e, 8.b, 9.e, 10.b

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Balcı, M. (2012). “Matematik Analiz-1”. Sürat Üniversite Yayınları.

[2] Bayraktar, M., (2010). “Analiz”. Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti. Yayın No: 1601, ISBN 978-605-395-412-5.

[3] Bizim, O., Tekcan A., Gezer B., (2011). “Genel Matematik-I”. Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti.

[4] Kadıoğlu, E., Kamali, M. (2013). “Genel Matematik”. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, 8. Baskı.

[5] Küçük, Y., Üreyen M., Orhon N., Şenel M., Özer O., Azcan H., (2002). “Genel Matematik”. Anadolu Üniversitesi Yayını, 2. Baskı.

ÖZDEŞLİKLER VE DENKLEMLER

İÇİNDEKİLER

- Özdeşlikler
- Çarpanlara Ayırma
- Denklemler
  - Birinci Dereceden Denklemler
  - İkinci Dereceden Denklemler

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Özdeşlikleri öğrenebilecek,
  - Çarpanlara ayırmayı öğrenebilecek,
  - Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözebilecek,
  - İkinci dereceden denklemleri çözebileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Nejmi CENGİZ

ÜNİTE
3

Özdeşlikler

- Özdeşlik Tanımı ve sık kullanılan özdeşlikler
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Çarpanlara Ayırma

- Ortak Çarpan Parantez Yöntemi
- Gruplandırma Yöntemi
- Özdeşliklerden Faydalanma Yöntemi

Denklemler

- Bir Bilinmeyenli Denklem Tanımı
- $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$

1. Dereceden Denklemler

- $ax + b = 0, \quad a \neq 0$

2. Dereceden Denklemler

- $ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0$

GİRİŞ

Bu bölümde matematiğin temel konularından olan ve birçok konuda karşılaşacağımız özdeşlikler, çarpanlarına ayırma, birinci dereceden ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ele alınacaktır.

Birçok alanda hesaplama işlemi yapılırken muhakkak bir denklemle karşılaşırız. Bu tür denklemleri çözebilmek için elementer seviyede olan bir bilinmeyenli birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözüm mantığını bilmek gerekir. Bu iki bilinmeyenli denklemlerin çözümü için de temel teşkil eder. Bu tür denklemleri çözerken daha çok özdeşlikler ve çarpanlara ayırma işlemi kullanılır. O hâlde, temel çarpanlara ayırma ve özdeşlik kurallarını bilmek gerekir.

Yukarıda belirtilen sebeplerden dolayı öncelikle çarpanlara ayırma ve bilinmesi gereken özdeşlikleri ele alarak birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözüm yöntemleri üzerinde durulacaktır.

ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde matematik için temel olan özdeşlikler ve denklemler üzerinde durulacaktır.

İçinde bilinmeyenler bulunduran ve bilinmeyenlere uygulanan bazı işlemler sonucu elde edilen ifadelere *cebirsel ifadeler* denir. Örneğin $\mathbf{5x-4}$, $\mathbf{2x^2+3}$, $\mathbf{x^2+y+1}$ ifadelerinin herbiri cebirsel ifade olarak adlandırılır. Bir cebirsel ifade içindeki bilinmeyenlere değişken denir. Cebirsel ifadeler içinde bulundurdukları değişkenlerin sayısına göre bir değişkenli, iki değişkenli veya n değişkenli cebirsel ifade olarak adlandırılır [3].

Aynı değişkenlere sahip iki cebirsel ifade verilmiş olsun. Değişkenlere verilen her değer için eşit olan cebirsel ifadelere *özdeşlik* adı verilir. Örnek olarak;

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

eşitliği bir özdeşliktir. Burada $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ değişkenleri yerine hangi değer verilirse verilsin eşitlik sağlanacaktır. Bunun gibi birçok özdeşlik yazılabilir. Bu özdeşliklerden bazıları,

- $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
- $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
- $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
- $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$
- $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$
- $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
- $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

biçimindedir.

Sağda verilen özdeşliklerden x^3+y^3 ve x^3-y^3 ile ilgili olanlar $(x+y)^3$ ve $(x-y)^3$ özdeşliklerinin bir sonucudur.

Bu özdeşliklerle ilgili örnek olarak

$$2016^2-2015^2=(2016-2015)(2016+2015)=4031,$$

$$(13)^2=(10+3)^2=10^2+2.10.3+3^2=169 \text{ verilebilir.}$$

$x^3 - y^3$
$= (x-y)(x^2 + xy$
$+ y^2)$

Örnek

• İki sayının toplamı 7 ve çarpımı 12 olduğuna göre bu sayıların küpleri toplamı kaçtır?

Çözüm:

Bu Sayılar x ve y olsun. $x + y = 7,\ \ xy = 12$ olarak verilmiştir.

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

Özdeşliğinde kullanılırsa,

$$(7)^3 = x^3 + y^3 + 3.12(7)$$
$$343 = x^3 + y^3 + 252$$
$$\Rightarrow\ x^3 + y^3 = 91$$

olur.

Örnek

• $x^3 - 8$ ifadesinin eşitini bulunuz ?

Çözüm:

Verilen ifade $x^3 - 2^3$ olarak yazılır. Bu da,

$$x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

olur.

Örnek

• $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$ ifadesini en sade şekilde yazınız.

Çözüm:

Verilen ifade $\frac{x^3-8}{x^2+2x+4} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4} = x - 2$ olarak bulunur.

Örnek

•$x + \frac{1}{x} = 5$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow (5)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow 25 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=23$$

olur.

Örnek

•$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{5}$ ve $x.y=10$ olduğuna göre, x^2+y^2 nin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x.y}=\frac{7}{5}$$
$$\Longrightarrow \frac{x+y}{10}=\frac{7}{5}\Longrightarrow x+y=14$$

olur. Diğer taraftan,

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\Longrightarrow 14^2=x^2+20+y^2$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2=176$$

bulunur.

Çarpanlarına ayırma işleminde sıklıkla ortak çarpan parantezine alma işlemi kullanılır.

ÇARPANLARA AYIRMA

Verilen çok terimli cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırmada genel bir yöntem yoktur. Aşağıda verilen yöntemler, özel yöntemlerdir. Problemin verilişine göre uygun yöntem kullanılır.

Ortak Çarpan Parantez Yöntemi

Verilen cebirsel ifadede bütün terimlerin ortak bir çarpanı varsa o ifadeyi ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırabiliriz.

Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

$$x^2+5x=x(x+5),$$
$$x^2y+xy^2+xy=xy(x+y+1),$$
$$x(x+1)+y(x+1)=(x+1)(x+y),$$
$$2(x-1)+y(1-x)=(x-1)(2-y).$$

Gruplandırma Yöntemi

Bazen verilen cebirsel ifadenin bütün terimlerinde bir ortak çarpan bulunmayabilir. Ancak, cebirsel ifadenin terimlerini belirli gruplara ayırarak ortak çarpanlar oluşturulabilir.

Örnek

•$x^2+xy-xz-yz$ ifadesini çarpanlarına ayırınız?

Çözüm:

Verilen cebirsel ifadeyi ikişer ikişer gruplandırarak ortak çarpan parantezine alalım.

$$x^2 + xy - xz - yz = (x^2 + xy) - (xz + yz)$$
$$= x(x + y) - z(x + y)$$
$$= (x + y)(x - z)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılmış olur.

Örnek

•$x^3 - x^2 + x - 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x - 1)$$
$$= x^2(x - 1) + (x - 1)$$
$$= (x - 1)(x^2 + 1)$$

biçiminde bulunur.

Örnek

•$y(x^2 + 1) - x(y^2 + 1)$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

Örnekte verilen cebirsel ifade gruplandırılmış olarak verilmiştir. Bu gruplandırmadan ortak çarpan parantezine almak mümkün değildir. Bu nedenle, önce çarpma işlemi yapılır sonra tekrar gruplandırılır. Buna göre,

$$y(x^2 + 1) - x(y^2 + 1) = yx^2 + y - xy^2 - x$$
$$= (yx^2 - xy^2) - (x - y)$$
$$= xy(x - y) - (x - y)$$
$$= (x - y)(xy - 1)$$

olur.

Özdeşliklerden Faydalanma Yöntemi

Verilen cebirsel ifadeyi çarpanlara ayırmak için özdeşliklerden yararlanılabilir. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2,$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2,$$

$$x^2 - xy + \frac{y^2}{4} = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2.$$

$x^2 + y^2$ ifadesi çarpanlarına ayrılamaz.

Aşağıdaki örneklerde ise toplam ve fark özdeşliği kullanılarak çarpanlara ayırma verilmiştir.

Örnek

• $x^3 - 8$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

Verilen cebirsel ifade küp farkı özdeşliği kullanılarak çarpanlarına ayrılır.

$$\boldsymbol{x^3 - 8 = x^3 - 2^3}$$

$$= (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılmış olur.

Örnek

• $x^4 - 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

Verilen cebirsel ifade iki kare farkı özdeşliği kullanılarak

$$\boldsymbol{x^4 - 1 = \left(x^2\right)^2 - 1^2}$$

$$= (x^2+1)(x^2-1)$$

$$= (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılmış olur.

Örnek

• $x^2 - (y-1)^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Çözüm:

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi,

$$x^2 - (y-1)^2 = [x + (y-1)][x - (y-1)]$$

$$= [x + y - 1][x - y + 1]$$

bulunur.

DENKLEMLER

Boş küme
$\emptyset$
sembolü ile gösterilir.

İki cebirsel ifade sonlu sayıda reel sayı için eşit oluyor ise bu eşitliğe denklem denir. Yani bilinmeyen içeren ve bilinmeyenlerin özel değerleri için sağlanan eşitliklerdir. Denklemi sağlayan bu özel değerlere denklemin kökleri veya çözümleri adı verilir. Kökleri bulma işlemine ise denklemi çözme denir. Bazı eşitlikler bilinmeyenlerin hiçbir değeri için sağlanmayabilir. Bu durumda denklemin çözüm kümesi yoktur veya boş kümedir denir. Bu bölümde bir bilinmeyenli denklemler incelenecektir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad$ (1)

şeklindeki ifadeye n. dereceden bir bilinmeyenli polinom denklem denir [3]. Bu bölümde $n = 1$ ve $n = 2$ alınarak birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözümleri üzerinde durulacaktır.

Birinci Dereceden Denklemler

$a \neq 0,\ a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$ax + b = 0$$

biçiminde olan denklemlere 1. dereceden denklem (lineer veya doğrusal denklem) denir. Bu denklemin çözümü;

$$ax + b = 0 \ \Longrightarrow ax = -b \ \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

olur. Buna göre aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek

•$3x - 9 = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$3x - 9 = 0 \ \Longrightarrow 3x = 9 \ \Longrightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

olur.

Örnek

- $7x - 5(3x - 2) = 2(3 - 2x)$ denklemini sağlayan x kaçtır?

Çözüm:

$$7x - 5(3x - 2) = 2(3 - 2x)$$

$$\Longrightarrow 7x - 15x + 10 = 6 - 4x$$

$$\Longrightarrow \ -8x + 4x = 6 - 10$$

$$\Longrightarrow \ -4x = -4$$

$$\Longrightarrow x = 1$$

bulunur.

Örnek

- $\frac{3}{x+2} = \frac{3}{2x-4}$ denklemini sağlayan x kaçtır?

Çözüm:

Verilen denklemin pay kısımları eşit olduğundan paydalarının eşit olması gerekir. O hâlde;

$$x + 2 = 2x - 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 6$$

sonucu elde edilir.

Örnek

- $\frac{x-2}{3} + \frac{x+2}{2} = \frac{x-4}{6} + 3$ olduğuna göre, x kaçtır?

Çözüm:

Verilen denklemde paydalar eşit olacak şekilde kesirler genişletilirse

$$\frac{2x-4}{6} + \frac{3x+6}{6} = \frac{x-4}{6} + \frac{18}{6} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x-4+3x+6}{6} = \frac{x-4+18}{6}$$

yazılır. Payların eşitliğinden;

$$5x + 2 = x + 18 \ \Longrightarrow \ x = 4$$

bulunur.

İkinci Dereceden Denklemler

a, b, c sabit reel sayılar, $a \neq 0$ ve x bilinmeyen olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

biçimindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Bu denklemin kökleri (çözüm kümesi), diskriminantı

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

olmak üzere,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

sayıları olur. Buna göre,

1) $\Delta > 0$ ise, kökler iki farklı reel sayıdır,
2) $\Delta = 0$ ise, kökler eşittir (çakışıktır),
3) $\Delta < 0$ ise, reel kök yoktur.

olur [3].

$ax^2+bx+c=0$
Denkleminin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Örnek

•$x^{3a-10} - 2x - 1 = 0$ denkleminin ikinci dereceden bir denklem olması için a kaç olmalıdır?

Çözüm:

İkinci derecen bir denklem olması için $3a - 10 = 2$ olmalıdır.

$$3a - 10 = 2 \Longrightarrow 3a = 12 \Longrightarrow a = 4$$

olur.

Örnek

•$x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin köklerini (çözüm kümesini) bulunuz.

Çözüm:

Verilen denklemde $a = 1,\ b = -2,\ c = -3$ olduğundan

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4.1.(-3) = 16 > 0$$

olarak bulunur. o hâlde denklemin iki farklı reel kökü vardır. Bu kökler

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2.1} = 3,\quad x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2.1} = -1$$

sayıları olur. O hâlde çözüm kümesi,

$$Ç = \{-1, 3\}$$

olacaktır.

Örnek

•$x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin reel köklerini (çözüm kümesini) bulunuz.

Çözüm:

Verilen denklemde $\boldsymbol{a = 1, b = 1, c = 1}$ olup;

$$\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 1 - 4.1.1 = -3 < 0}$$

olduğundan dolayı denklemin Reel kökü yoktur.

Örnek

•$x^2 + 2x + 1 = 0$ denkleminin reel köklerini bulunuz.

Çözüm:

Verilen denklemde $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$ olduğundan

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4.1.1 = 0$$

olarak bulunur. O hâlde denklemin çakışık kökü yani tek kökü vardır. Bu çakışık kökler

$$x_1 = x_2 = \frac{-2}{2.1} = -1$$

sayısı olur.

İkinci dereceden bazı denklemleri çarpanlarına ayırarak çözüm kümesini (köklerini) bulabiliriz.

Örnek

•$x^2 - 4 = 0$ denkleminin reel köklerini bulunuz.

Çözüm:

Verilen denklemi çözmek için iki kare farkından yararlanabiliriz.

$$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

eşitliğinin sağlanması için çarpanlarının sıfır olması gerekir bu sebeple,

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

bulunur.

Örnek

•$mx^2 - (2m+1)x + m + 2 = 0$ denkleminin köklerinin birbirine eşit olması için m kaç olmalıdır?

Çözüm:

Denklemin köklerinin eşit olması için $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ olmalıdır. Buna göre;

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(2m+1)]^2 - 4.m(m+2) = 0$$

$$\Longrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8m = 0$$

$$\Longrightarrow -4m = +1 = 0$$

$$m = \frac{1}{4}$$

olur.

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ denkleminin kökleri;

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğu bilindiğine göre, bu köklerin toplamı;

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

ve köklerin çarpımı;

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{c}{a}$$

olur. Özel durumda, verilen denklemde $a = 1$ olması durumunda yani, $x^2 + bx + c = 0$ biçiminde ise kökler çarpımı *c* ve kökler toplamı –*b* olduğu görülür. Yani,

$$T = x_1 + x_2 = -b \ ,$$
$$Ç = x_1 . x_2 = c$$

olur. Bu sonuca göre eğer kökler tam sayıysa sezgisel olarak çarpımları *c* ve toplamları *b* olan iki sayı bulmak kolay olacaktır. Bulunan bu sayıların ters işaretlileri verilen denklemin kökleridir [1,2]

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Örnek

•$x^2 + 8x + 15 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm:

Verilen denklemin köklerini bulmak için çarpımları 15 ve toplamları 8 olan iki sayı bulalım. Bunlar 3 ile 5 sayısıdır. O hâlde kökler;

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -5$$

olarak bulunur.

Örnek

•$x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm:

Çarpımları -3 ve toplamları -2 olan iki sayı -3 ile 1 tam sayılarıdır. O hâlde denklemin kökleri;

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -1$$

olarak bulunur.

Örnek

•Çözüm kümesi $\{1,5\}$ olan ikinci dereceden bir denklem yazınız.

Çözüm:

Kökler toplamı $T = 1 + 5 = 6$ kökler çarpımı $Ç = 1.5 = 5$ olup istenen ikinci derece denklem;

$$x^2 - Tx + Ç = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

olarak bulunur.

Bu tür soruları aşağıdaki gibi de çözebiliriz. Denklemin çözüm kümesi 1 ve 5 olduğuna göre;

$$(x-1)(x-5) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

olur.

Örnek

•Çözüm kümesi $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ olan ikinci dereceden bir denklem yazınız.

Çözüm:

Kökler toplamı $T = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$,kökler çarpımı $Ç = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ olup istenen ikinci derece denklem;

$$x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

bulunur.

Örnek

•$2x^2 - 3mx + 2m = 0$ denkleminin köklerinden biri $x_1 = 1$ ise m değeri nedir?

Çözüm:

Denklemin bir kökü 1 olduğuna göre verilen denklemi sağlar. Yani verilen denklemde $x = 1$ yazılırsa

$$2.1^2 - 3m.1 + 2m = 0 \quad \Longrightarrow m = 2$$

bulunur.

Örnek

•$mx^2 - (m+1)x + 3 = 0$ denkleminin kökler toplamı 4 olduğuna göre $m =$?

Çözüm:

Kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4$ olarak verildiğine göre;

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-(m+1)}{m} = 4 \implies m = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Örnek

• $x^2 + x + 2m = 0$ ve $2x^2 - 5x + 4m + 7 = 0$ denklemlerinin birer köklü ortak olduğuna göre, m kaçtır?

Çözüm:

Verilen denklemlerin ortak kökü x_1 ise verilen iki denklemi de sağlayacağından $x_1^2 + x_1 + 2m = 0$ ve $2x_1^2 - 5x_1 + 4m + 7 = 0$ eşitlikleri yazılır. Birinci denklemin iki katı alınıp ikici denkleme eşitlenirse,

$$2x_1^2 + 2x_1 + 4m = 2x_1^2 - 5x_1 + 4m + 7$$

$$\implies 7x_1 = 7 \implies x_1 = 1$$

olur. Bulunan değer her iki denklemin kökü olduğuna göre her iki denklemi de sağlayacaktır. O hâlde birinci denklemden,

$$1^2 + 1 + 2m = 0 \implies m = -1$$

bulunur.

Bireysel Etkinlik

- $x^2 + 9x + 20 = 0$
- $x^2 - x - 12 = 0$
- $x^2 - 3x + 2 = 0$ denklemlerinin köklerini bulunuz.

Özet

- Matematiğin temel konularında biri olan özdeşlikler verilmiştir. Kesirli problemlerde sadeleştirme yapabilmek için veya bir çok matematik problemini çözebilmek için temel özdeşlikler örneklerle tanıtılmıştır.
- Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözebilmek için bilinmeyen değer eşitliğin bir tarafında, bilinen değerler diğer tarafına alınarak dört işlem yardımıyla birinci dereceden denkelmler çözülür.
- ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözermek için $\Delta = b^2 - 4ac$ değerine bakılarak denklemin çözüm kümesi (kökleri) $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ eşitlikleri yardımıyla bulunur.
- İkinci dereceden denklemlerin çözüm kümesini bulmak için çarpanlara ayırma yöntemleri veya köklerle katsayılar arasındaki ilişkiden faydalanılır.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $(x-1)^2-(x+1)^2$ ifadesinin özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $2x^2-2$
   b) $-4x$
   c) $4x$
   d) -4
   e) 0

2) $x+y=3$ ve $x \cdot y=2$ olduğuna göre, x^3+y^3 ifadesinin değeri kaçtır?
   a) 6
   b) 8
   c) 9
   d) 10
   e) 12

3) $x^2-13x+40$ ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $x+8$
   b) $x-10$
   c) $x+5$
   d) $x-4$
   e) $x-5$

4) $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x+2}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{x}{x-1}$
   b) $2x$
   c) $\frac{x-2}{x+1}$
   d) $\frac{x-2}{x-1}$
   e) $x-2$

5) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{12}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\{9\}$
   b) $\{-9\}$
   c) $\{-9,9\}$
   d) $\{3\}$
   e) $\{-3,3\}$

6) $3x - 2(4x - 3) = 9 + 2(3 - x)$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) -4
   b) -3
   c) 1
   d) 2
   e) 5

7) $\frac{(x^2-4)(4-x)}{(x+2)(x+4)} = 0$ denkleminin çözüm kümesindeki elamanların toplamı kaçtır?
   a) 6
   b) 5
   c) -5
   d) 0
   e) 2

8) $x^{\frac{m-3}{m}} + 4x - 2 = 0$ denkleminin ikinci dereceden olması için m kaç olmalıdır?
   a) 3
   b) -3
   c) 5
   d) 1
   e) -1

9) $mx^2 - (2m + 1)x + m + 2 = 0$ denkleminin çakışık iki kökü oluğuna göre kökler toplamı kaçtır?
   a) 4
   b) 9
   c) 16
   d) 20
   e) 24

10) $2x^2 - 3mx + 2m = 0$ denkleminin köklerinden biri $x_1 = 1$ ise diğer kök kaçtır?
   a) -1
   b) -2
   c) 3
   d) 2
   e) 1

Cevap Anahtarı

1.b, 2.c, 3.e, 4.d, 5.c, 6.b, 7.a, 8.b, 9.b, 10.d

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1]. Balcı, M. (1999). *Matematik Analiz* (1. Cilt). ISBN: 975-6683-02-03. Ankara: Balcı Yayınları.

[2]. Sağel, M.K. ve Aktaş, M. (2010). *Genel Matematik 1,* ISBN: 975-8792-03-2, Ankara, Pegem Akademi.

[3]. Kadıoğlu, E. ve Kamali, M. (2009). *Genel Matematik*. ISBN: 978-975-8151-57-8. Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi,

ORAN, ORANTI VE DENKLEM PROBLEMLERİ

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Oran ve orantı problemlerini çözebilecek,
  - Aritmetik ortalama ve geometrik ortalama kavramlarını öğrenecek,
  - Denklemleri oluşturup çözebilecek,
  - Sayı, faiz, kar-zarar, hız problemlerini çözebileceksiniz.

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Nejmi CENGİZ

ÜNİTE

4

Oran ve Orantı:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

Orantı Çeşitleri:

- Doğru Orantı, $\frac{a}{b} = k$
- Ters Orantı, $a = \frac{k}{b}$
- Birleşik Orantı

Aritmetik Ortalama:

- Üç sayının aritmetik ortalaması
- $A.O = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$

Geometrik Ortalama:

- İki sayının Geometrik Ortalaması
- $G.O = \sqrt{a_1.a_2}$

Denklem Problemleri:

- Sayı Problemleri Uygulamaları
- Yüzde-Faiz Problemleri Uygulamaları
- Hareket Problemleri Uygulamaları
- Karışım Problemleri Uygulamaları

GİRİŞ

Bu bölümde matematiğin temel konularından olan oran ve orantı konusu ele alınacaktır. Matematik ve uygulamalı bilimlerin gibi alanında karşılaşacağımız oran ve orantı konusu, İktisat, işletme mühendislik gibi uygulamalı bilimlerin yanı sıra günlük hayatta da birçok alanda ihtiyaç duyarız.

Matematikle uğraşmanın insanların muhakeme kabiliyetine çok büyük katkısı olduğu bilinmektedir. İnsanlar günlük hayatlarında birçok problemin çözümü için zihninden denklem kurar ve çözüm yapar. Çoğu zaman problemleri çözmek için problemde verilen duruma uygun düşen bir matematiksel ifade oluşturur. Bu ünitenin amacı denklemleri günlük hayattaki durumlara uygulamaktır. Bunun için öncelikle oran, orantı ve denklem problemler gruplandırılacaktır.

ORAN VE ORANTI

Oranlanan çoklukların birimleri aynı olmalıdır.

Tanım: Aynı cins iki çokluğun birbirine bölünmesine *oran*, iki veya daha çok oranın birbirine eşitliğine *orantı* denir.

O hâlde $\frac{a}{b}$ ifadesi a'nın b'ye oranıdır. $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ iki oran olmak üzere $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ eşit ise orantı olur. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ olacak şekilde bir k sayısına orantı sabiti denir [1,2,3].

Orantının Özellikleri

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$$

Orantı ile ilgili aşağıdaki özellikleri yazabiliriz;

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow a.d=b.c$ (Bir orantıda içler çarpımı dışlar çarpımına eşittir.)
2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Longrightarrow \frac{ma+nc}{mb+nd}=k$
4. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Longrightarrow \frac{a.c}{b.d}=k^2$

Bu özellikleri kullanarak aşağıdaki örneklerin çözümlerinin nasıl yapıldığını inceleyiniz [3].

Örnek

• $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{2}$ ve $x+3y-z=40$ olduğuna göre x, y ve z değerlerini bulunuz?

Çözüm:

Verilen orantının orantı sabiti k olsun. O hâlde,

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{2}=k \Longrightarrow x=3k, \qquad y=5k, \qquad z=2k$$

olacaktır. Bu değerler $x+3y-z=40$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$x + 3y - z = 40 \Longrightarrow 3k + 3.5k - 2k = 40 \Longrightarrow 16k = 40 \Longrightarrow k = \frac{5}{2}$$

olarak bulunur. O hâlde

$$x = 3.\frac{5}{2} = \frac{15}{2}, \quad y = 5.\frac{5}{2} = \frac{25}{2}, \quad z = 2.\frac{5}{2} = 5$$

bulunur.

Örnek

- $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ ise $\frac{3a+4b}{a+b}$ oranını bulunuz.

Çözüm:

Verilen orantı $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k$ olarak yazılır. Bu orantıdan $a = 2k,\ b = 3k$ olur. Bu değerler $\frac{3a+4b}{a+b}$ oranında kullanılırsa,

$$\frac{3a + 4b}{a + b} = \frac{3.2k + 4.3k}{2k + 3k} = \frac{18k}{5k} = \frac{18}{5}$$

elde edilir.

Örnek

- a, b, c maddeleri $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ oranında karıştırılarak 180 gramlık karışım elde ediliyor. Bu karışımda kaç gram b maddesi kullanılmıştır?

Çözüm:

Verilen orantıdan,

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Longrightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k$$

yazılır. Ayrıca karışımın miktarı 180 gram olduğuna göre,

$$a + b + c = 180 \Longrightarrow 2k + 3k + 4k = 180 \Longrightarrow k = 20$$

Olur. Bu durumda $b = 3k \Longrightarrow b = 3.20 = 60$ gram kullanılmıştır.

Örnek

- $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $\frac{y}{z} = \frac{4}{5}$ ve $x + y + z = 30$ ise y değeri kaçtır?

Çözüm:

Verilen orantıların birincisinde y ikinin katı bir sayı, ikinci orantıda ise dördün katı olarak verilmiştir. Uygunluğu sağlamak için birinci orantıyı iki ile genişletirsek

$$\frac{x}{y}=\frac{3.2}{2.2}=\frac{6}{4}, \quad \frac{y}{z}=\frac{4}{5}$$

olacaktır. Bu durumda $x=6k,\ y=4k,\ z=5k$ olur.

$$x+y+z=30 \implies 6k+4k+5k=30 \implies k=2$$

olur. Buna göre, $y=4k \implies y=4.2=8$ olacaktır.

Orantı Çeşitleri

a ile b doğru orantılı ise $\frac{a}{b}=k$ veya $a=k.b$

Doğru Orantı: Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de artıyor veya biri azalırken diğeri de azalıyor ise bu çokluklara *doğru orantılıdır* denir.

a ile b doğru orantılı ise $k\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\frac{a}{b}=k$ veya $a=k.b$ olarak yazılır.

Örnek

• 2 usta bir günde 48 m^2 duvar boyarsa aynı nitelikte 5 usta bir günde kaç m^2 duvar boyar?

Çözüm:

Usta sayısı artığında yapılan iş de artacağından bu iki oran doğru orantılıdır. O hâlde,

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ usta} & 48 \text{ m}^2 \\ 5 \text{ usta} & x \text{ m}^2 \end{array}$$

$$2x=5.48 \implies x=\frac{5.48}{2}=120\ m^2$$

duvar boyar.

Örnek

• 60 çikolata üç çocuğa; 3, 4 ve 5 sayıları ile doğru orantılı olarak paylaştırılıyor. En fazla çikolata alan çocuk kaç çikolata almıştır?

Çözüm:

Çocukların aldığı çikolata sayıları a, b ve c olsun. O hâlde,

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k \implies a=3k, b=4k, c=5k$$

olur. $3k+4k+5k=60 \implies 12k=60 \implies k=5$'tir. En fazla çikolata alan çocuk, $c=5k=5.5=25$ tane almıştır.

Ters orantı: Orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri azalıyor veya biri azalırken diğeri artıyor ise bu çokluklara *ters orantılıdır* denir [2,3]

a ile b ters orantılı ise $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a = \frac{k}{b}$ veya $k = a.b$ olarak yazılır.

a ile b ters orantılı ise $a = \frac{k}{b}$ veya $k = a.b$

Örnek

- 5 işçi bir işi 12 saate yaparsa, 10 işçi aynı işi kaç saate yapar?

Çözüm:

İşçi sayısı artığında işin yapılma süresi azalacağından bu iki oran arasında ters orantı vardır. O hâlde,

$$
\begin{array}{l}
5 \text{ işçi} \longrightarrow 12 \text{ saat} \\
10 \text{ işçi} \longrightarrow x \text{ saat} \\
\hline
\end{array}
$$

$$5.12 = 10.x \Longrightarrow \quad x = \frac{5.12}{10} = 6 \text{ saat}$$

olarak bulunur.

Örnek

- Birbirini çeviren iki makine dişlisinden birincisi dakikada 360 devir, ikincisi dakikada 240 devir dönmektedir. Bu iki dişlideki toplam diş sayısı 540 ise küçük dişlideki diş sayısı kaçtır?

Çözüm:

Dişli sayısı artıkça devir sayısı azalacağından dişli sayısı ile devir sayısı arasında ters orantı vardır. Büyük dişlideki diş sayısı a, küçük dişlideki diş sayısı b olmak üzere $a + b = 540$'dır.

$$
\begin{array}{l}
a \longrightarrow 240 \\
b \longrightarrow 360 \\
\hline
\end{array}
$$

$$a.240 = b.360 \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{360}{240} = \frac{3}{2} \Longrightarrow a = 3k, b = 2k$$

olur. O hâlde, $a + b = 540 \Longrightarrow 3k + 2k = 540 \Longrightarrow 5k = 540 \Longrightarrow k = 108$ olur.

Küçük dişlideki diş sayısı $b = 2k = 2.108 = 216$ olarak bulunur.

Birleşik orantı: Bir çokluğun aynı anda bir çoklukla doğru orantılı ve başka bir çoklukla da ters orantılı ise iki durumu birlikte değerlendirmek gerekir. Böyle durumları bileşik orantı ile ifade edilir [3].

Örnek

- 3 işçi, 18 m^2 halıyı 6 günde dokursa aynı kapasitedeki 2 işçi 24 m^2 halıyı kaç günde dokur?

Çözüm:

Bu soruda görüldüğü gibi işçi sayısı (1. çokluk) gün sayısı (2. çokluk) ile ters orantılı ve dokunan halı alanı (3. çokluk) ile doğru orantılıdır. Bu yüzden her iki durumu birlikte düşünmek gerekir.

$$\begin{array}{lll} 3 \text{ işçi} \longrightarrow & 6 \text{ günde} & 18 \text{ m}^2 \\ 2 \text{ işçi} \longrightarrow & x \text{ günde} & 24 \text{ m}^2 \\ \hline \end{array}$$

$$3.6.24 = 2.x.18 \Rightarrow x = \frac{3.6.24}{2.18} = 12$$

günde dokurlar.

Örnek

- x, y ile doğru orantılı z ile ters orantılıdır. $y = 2$ iken $x = 4$ ve $z = 9$ dur. $y = 2$ ve $z = 4$ iken x in değeri kaçtır?

Çözüm:

Verilere göre $x = k.\frac{y}{z}$ olarak yazılır. Orantı sabiti $k = \frac{x.z}{y} = \frac{4.9}{2} = 18$'dir.

Buna göre,

$$k = \frac{x.z}{y} \Rightarrow 18 = \frac{x.4}{2} \Rightarrow \quad x = 9$$

olarak bulunur.

$$\mathrm{A.O} = \frac{\mathrm{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}}{\mathrm{n}}$$

Aritmetik Ortalama: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibi n tane sayının aritmetik ortalaması $A.O = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ ile bulunur [3].

Örnek

- Üç kişinin yaş ortalaması 20'dir. Bu guruba bir kişi daha katıldığında yaş ortalaması 21 oluyor. Bu kişinin yaşı kaçtır?

Çözüm:

Verilen üç kişinin yaş ortalaması 20 olduğundan,

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=20 \implies x_1+x_2+x_3=60$$

olur. Guruba bir kişi daha katılırsa, yaş ortalaması

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)+x_4}{4}=21$$

Olup buradan

$$\frac{60+x_4}{4}=21 \implies x_4=24$$

bulunur.

Örnek

- 5 tane sayının aritmetik ortalaması 28'dir. Bu sayılara hangi sayı eklenirse aritmetik ortalama 30 olur?

Çözüm:

Verilenlere göre,

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}=28 \implies x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=140$$

olup x_6 sayısı da eklenirse,

$$\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+x_6}{6}=30 \implies 140+x_6=180 \implies x_6=40$$

olarak bulunur.

Geometrik Ortalama

İki sayının geometrik ortalaması $G.O=\sqrt{a_1.a_2}$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ gibi n tane sayının geometrik ortalaması $G.O=\sqrt[n]{a_1.a_2.\dots.a_n}$ olarak verilir. Buna göre iki sayının geometrik ortalaması $G.O=\sqrt{a_1.a_2}$ olur [2,3]

Örnek

- 8, 27 ve 64 sayılarının geometrik ortalamasını bulunuz?

Çözüm:

Verilen üç sayının geometrik ortalaması istenmektedir. O hâlde

$$G.O=\sqrt[3]{8.27.64}=\sqrt[3]{2^3.3^3 4^3}=2.3.4=24$$

olarak bulunur.

Örnek

• x ve y'nin geometrik ortalaması 4'tür. x, y ve z'nin geometrik ortalamsı 6 olduğuna göre z sayısı kaçtır?

Çözüm:

Verilenlere göre,

$$\sqrt{x.y} = 3 \implies x.y = 9$$

ve

$$\sqrt[3]{x.y.z} = 6 \implies x.y.z = 6^3 = 216$$
$$\implies 9.z = 216 \implies z = 24$$

bulunur.

DENKLEM PROBLEMLERİ

Matematikle uğraşmanın insanların muhakeme kabiliyetine çok büyük katkısı olduğu bilinmektedir. İnsanlar günlük hayatlarında birçok problemin çözümü için zihninden denklem kurar ve çözüm yapar. Çoğu zaman problemleri çözmek için problemde verilen duruma uygun düşen bir matematiksel ifade oluşturur. Bu ünitenin amacı denklemleri günlük hayattaki durumlara uygulamaktır. Bu uygulamaları alt başlıklar altında örneklerle verelim.

Sayı Problemleri

Örnek

• Bir sayının $\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{4}$ inin toplamı 28 ise bu sayı kaçtır?

Çözüm:

Sayı x olsun. O hâlde bu sayı için,

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 28 \implies \frac{4x + 3x}{12} = 28$$
$$\implies 7x = 12.28 \implies x = \frac{12.28}{7} = 48$$

bulunur.

Çözüm:

Örnek

- Bir top kumaşın önce $\frac{1}{5}$'i, sonra kalanın $\frac{3}{4}$'ü satılıyor. Geriye 12 metre kumaş kaldığına göre, kumaşın tamamı kaç metredir?

Kumaşın tamamı x metre olsun. İlk durumda satılan kumaş $\frac{x}{5}$ metredir. Kalan kumaş $x-\frac{x}{5}=\frac{4x}{5}$ metre olur. İkinci adımda satılan kumaş $\frac{4x}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3x}{5}$ metre olacaktır. Toplam satılan kumaş $\frac{x}{5}+\frac{3x}{5}=\frac{4x}{5}$ metre olur. Geriye $x-\frac{4x}{5}=\frac{x}{5}$ metre kumaş kalır. Kalan kumaşın 12 metre olduğu örnekte verildiğine göre,

$$\frac{x}{5}=12 \implies x=60$$

metre elde edilir.

Örnek

- Bir otobüsdeki erkek yolcuların sayısı bayanların 3 katıdır. Otobüsden 8 karı koca inerse, erkeklerin sayısı bayanların 5 katı olacaktır. Buna göre otobüsde kaç erkek yolcu vardır.

Çözüm:

Otobüs deki erkek yolcu sayısını *E* ile bayan yolcu sayısını da *K* ile gösterelim. Soruda verilenlere göre,

$$E=3K$$

ve otobüs den 8 karı koca inerse erkek ve bayanların sayısı $E-8$ ve $K-8$ olacaktır. Buna göre,

$$E-8=5(K-8) \implies E=5K-32$$

olur. Son eşitlikte $E=3K$ kullanılır ise,

$$3K=5K-32 \implies 2K=32 \implies K=16$$

bulunur. İstenen erkek sayısı olduğuna göre, $E=3K=3.16=48$ olur.

Örnek

- Bir deponun $\frac{2}{5}$'si boştur. Depoya 14 litre su ilave edilince deponun $\frac{4}{5}$'i doluyor. Deponun tamamı kaç litre su alır?

Çözüm:

Deponun tamamı x litre su alsın. Deponun $\frac{2x}{5}$ i boş ise $\frac{3x}{5}$ i dolu olacaktır. Bunun üzerine 14 litre su konduğuna göre,

$$\frac{3x}{5} + 14 = \frac{4x}{5} \Longrightarrow \frac{x}{5} = 14 \Longrightarrow x = 70$$

litre olarak bulunmuş olur.

Yüzde-Faiz Problemleri

a sayısının % b si $a.\frac{b}{100}$ şeklinde ifade edilir. Bir yatırıma ait faiz geliri

Faiz = Ana para. yüzde oranı . zaman

İle hesaplanır. Sembolik olarak bu formül

$$F = A.n.t$$

$F = A.n.t$

şeklinde gösterilir. Benzer olarak;

Toplam Maliyet: Bir ürünün pazara sunulmasına kadar geçen süre içindeki ürün için harcanan para,

Toplam Hasılat: Bir üründen elde edilen tüm gelir,

Kar = Toplam Hasılat – Toplam Maliyet

bir ürünün satış fiyatı ise

Satış Fiyatı = Alış Fiyatı + Kar (Satış fiyatı=Alış fiyatı-zarar)

biçiminde ifade edilir.

Örnek

- Hangi sayının % 40 'ının 4 fazlası, aynı sayının % 60 'ına eşit olur?

Çözüm:

Bu sayı x olsun. Soruya göre,

$$x.\frac{40}{100} + 4 = x.\frac{60}{100}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikten,

$$4 = \frac{60x - 40x}{100} \Longrightarrow \frac{20x}{100} = 4 \Longrightarrow x = 20$$

bulunur.

Örnek

- 40 sorunun sorulduğu bir sınavda bir öğrenci soruların % 75 'ini doğru cevaplamıştır. İlk 25 sorunun 17'sini doğru cevapladığına göre kalan soruların kaç tanesini yanlış cevaplamıştır?

Çözüm:

Sınavda sorulan 40 sorunun % 75 i $40.\frac{75}{100} = 30$ olacaktır. O hâlde toplamda 10 soruyu yanlış cevaplamıştır. İlk 25 sorunun 17 si doğru ise $25 - 17 = 8$ soru yanlıştır. Sonuç olarak kalan soruların 2'sini yanlış cevaplamıştır.

Örnek

- % 30 kârla satılan bir malın satış fiyatı üzerinden % 20 indirim yapılıyor. Bu duruma göre alış fiyatı üzerinde kar yüzdesi kaçtır?

Çözüm:

Bu tür problemleri çözerken 100 sayısı alınarak problemi çözmek kolay olacaktır.

O hâlde malın alış fiyatı 100 TL olsun. % 30 kârla satarsak

$$Satış\ fiyatı = 100 + 100\frac{30}{100} = 130\ TL$$

olacaktır. Satış fiyatı üzerinden % 20 indirim yapılırsa,

$$Satış\ fiyatı = 130 - 130.\frac{20}{100} = 130 - 26 = 104TL$$

olur. Ürün 100 TL ye alınıp son olarak 104 TL'ye satıldığına göre kar oranı % 4'tür.

Örnek

- Bankaya yıllık % 3 faizle yatırılan 1200 TL' nin 3 yıllık faiz getirisi ile yıllık % 6 faizle 3 aylığına yatırılan bir miktar paranın faiz getirisi eşit ise bankaya yatırılan para kaç TL dir?

Çözüm:

İkinci bankaya yatırılan para miktarı x TL olsun. Her iki durum içinde faiz hesaplanırsa;

$$F_1 = 1200.\frac{3}{100}.3 = 108\ TL$$

$$F_2 = x.\frac{6}{100} \cdot 3.\frac{1}{12} = \frac{18x}{1200}\ TL$$

olacaktır. F_2'de aylık faiz hesaplandığından 12 ile bölünmüştür. Bu faizler eşit olduğu verildiğine göre,

$$\frac{18x}{1200} = 108 \Longrightarrow x = 7200\ TL$$

olarak bulunur.

Örnek

- Bir satıcı elindeki iki maldan birini % 40 kârla 840 TL ye, diğerini % 40 zararla 840 TL ye satmaktadır. Satıcının her iki satıştaki kâr zarar durumu nedir?

Çözüm:

Birinci malın alış fiyatı x lira ikinci malın alış fiyatı y lira olsun. Soruda verilenlere göre,

$$x + \frac{40x}{100} = 840 \ \Longrightarrow x = 600\ TL$$

olur. Birinci maldan elde edilen kar $840 - 600 = 240 TL$ olur.

İkinci mal ise,

$$y - \frac{40y}{100} = 840 \ \Longrightarrow y = 1400\ TL$$

bulunur. İkinci maldan elde edilen zarar $840 - 1400 = -560\ TL$ olacaktır. Bu iki malda elde edilen sonuç $240 - 560 = -320\ TL$ zarar söz konusudur.

Hareket Problemleri

$l = v.t$

Hareket problemlerini çözerken yol eşittir hız çarpı zaman formülünü kullanılır. l yol, t zaman, v hızı göstermek üzere,

$$l = v.t \quad (Yol = Hız\ .Zaman)$$

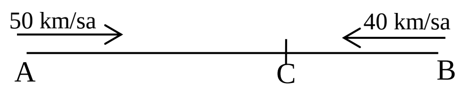
$$Ortalama\ hız = \frac{Toplam\ yol}{Toplam\ zaman}$$

olarak ifade edilir.

Örnek

- Aralarında 450 km uzaklık bulunan iki araçtan biri saate 50 km hızla, diğeri saate 40 km hızla birbirine doğru harekete geçiyorlar. Kaç saat sonra karşılaşırlar?

Çözüm:



A ve B noktalarından hareket eden araçlar t saat sonra C noktasında karşılaşsınlar. Bu durumda

$$|AC| = 50t \text{ ve } |BC| = 40t$$

olur. $|AB| = 450\ km$ olduğuna göre,

$$50t + 40t = 450 \Longrightarrow 90t = 450 \ \Longrightarrow t = 5 \text{ saat}$$

olarak bulunur.

Örnek

- Bir araç A şehrinden B şehrine 30 km/saat hızla gidip 50 km/saat hızla geri dönüyor. Gidiş-dönüş 16 saat sürdüğüne göre bu şerihler arası uzaklık kaç km'dir?

Çözüm:

Gidiş t saat, dönüş $(16 - t)$ saat sürecek ve gidiş-dönüş yolu birbirine eşit olduğunda,

$$30t = 50(16 - t) \Longrightarrow 30t = 800 - 50t$$

$$\Longrightarrow 80t = 800 \Longrightarrow t = 10 \text{ saat}$$

olur. |AB| yolu

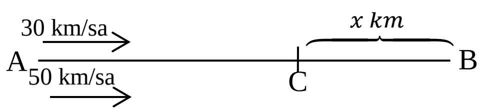
$$|AB| = 30t \Longrightarrow 30.10 = 300 \text{ km}$$

olarak bulunur.

Örnek

- Hızları saatte 30 km ve 50 km olan iki araç aynı anda A'dan B'ye doğru hareket ediyorlar. Hızlı giden araç B ye varıp hiç beklemeden geri dönüyor. Bu araçlar hareketlerinden 8 saat sonra C noktasında karşılaştıklarına göre A ile B arası kaç km dir?

Çözüm:



8 saat sonra C noktasında karşılaştıklarına göre,

$$|AC| = 30.8 = 240\ km$$

olacaktır. Hızı saatte 50 km olan araç 8 saatte |AB| yolunu gidip hiç beklemeden dönüp C noktasına geldiğine göre toplam gittiği yol $|AC|+|CB|+|BC|$ olur. Buna göre,

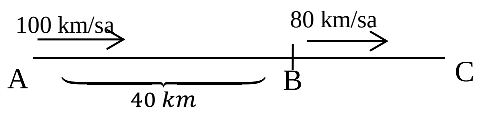
$$50.8=240+2x \Longrightarrow x=80\ km$$

olup $|AB|=|AC|+|CB|=240+80=320\ km$ olarak bulunur.

Örnek

- Aralarında 40 km mesafe bulunan iki araçtan arkadakinin hızı saatte 100 km, öndekinin hızı saatte 80 km olmak üzere aynı anda aynı yöne doğru harakete başlıyorlar. Kaç saat sonra arkadaki araç öndeki araca yetişir?

Çözüm:



Arkadan gelen araç öndeki aracıa t saat sonra C ‘de yetişmiş olsun. Bu durumda,

$$|AC|=100.t, \qquad |BC|=80.t$$

$$|AB|=|AC|-|BC|$$

$$\Longrightarrow 40=100.t-80.t \Longrightarrow 40=20.t \Longrightarrow t=2 \text{ saat}$$

olur.

Karışım Problemleri

$$Karışım\ oranı=\frac{Saf\ madde}{Tüm\ karışım}$$

Karışım problemlerin çözerken, istenen saf maddenin tüm karışıma oranı bize karışım oranını verir. Bu oran,

$$Karışım\ oranı=\frac{Saf\ madde}{Tüm\ karışım}$$

olarak yazılır [3].

Örnek

- Tuz oranı % 20 olan 30 kg'lık tuzlu su karışımına 10 kg tuz, 10 kg su katılırsa karışımın tuz oranı kaç olur.

Çözüm:

30 kg'lık karışımda $30.\frac{20}{100} = 6$ kg tuz vardır. Bu karışıma 10 kg tuz katıldığından tuz miktarı 16 kg olacaktır. O hâlde,

$$Tuz\ \ oranı = \frac{16}{50}$$

olur. Basit bir orantıyla,

$$\begin{array}{ccc} 50 \text{ kg} & & 16 \text{ kg tuz} \\ & \times & \\ 100 \text{ kg} & & x \text{ kg tuz} \\ \hline \end{array}$$

$$50.x = 1600 \Longrightarrow x = 32$$

yani tuz oranı % 32 olur.

Örnek

• % 20'lik 80 kg tuzlu su sıcak ortamda bir süre kalınca 64 kg oluyor. Bu durumda yeni karışımın tuz oranı nedir?

Çözüm:

Karışımdaki tuz miktarı $80.\frac{20}{100} = 45$ kg olacaktır. Buharlaşma esnasında tuz miktarı değişmediğinden

$$Karışım\ oranı = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$$

yani, % 25 'lik bir karışım olur.

Örnek

• % 40'ı şeker olan 40 kg'lık karışımla, % 10'u şeker olan 40 kg olan karışım karıştırılırsa karışımın şeker oranı ne olur?

Çözüm:

40 kg’lık şekerli suyun $40.\frac{40}{100} = 16$ kg’ı şekerdir.

40 kg’lık şekerli suyun $40.\frac{10}{100} = 4$ kg ı şekerdir.

O hâlde,

$$Şeker\ oranı = \frac{16+4}{40+40} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$$

olur. Yani şeker oranı % 25’tir.

Özet

- Matematiğin temel konularında olan oran ve orantı verilmiş, doğru orantı, ters orantı, bileşik orantı kavramları açıklanmıştır. Ayrıca Aritmetik ortalama ve geometrik ortalama kavramları tanıtılarak örnekler verilmiştir.
- Aynı cins iki çokluğun birbirine bölünmesine oran, iki veya daha çok oranın birbirine eşitliğine orantı, orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri de artıyor veya biri azalırken diğeri de azalıyor ise bu çokluklara doğru orantı, orantılı iki çokluktan biri artarken diğeri azalıyor veya biri azalırken diğeri artıyor ise bu çokluklara ters orantılıdır denir.
- Karşılaşabileceğimiz denklem problemleri incelenmiş, denklem kurma ve denklemi çözme teknikleri hakkında bilgi verilerek örneklerle desteklenmiştir.
- Sayı problemleri konularına göre sınıflandırılarak, karişim problemleri, hız problemleri faiz problemleri örneklerle açıklanmıştır.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ olduğuna göre $\frac{5ab}{a^2-b^2}$ kesrinin değeri kaçtır?
   a) 5
   b) 6
   c) 7
   d) 8
   e) 9

2) Bir ressam kırmızı, sarı, mavi renkli boyaları $\frac{k}{s}=\frac{2}{3}$ ve $\frac{s}{m}=\frac{4}{3}$ oranlarında kullanarak bir karışım elde etmek istiyor. Ressam 290 gramlık bir karışım hazırladığına göre, karışımdaki kırmızı boya kaç gramdır?
   a) 80
   b) 90
   c) 100
   d) 110
   e) 120

3) Aynı kapasitede 12 işçi bir işi birlikte 42 saatte bitiriyorsa, aynı işi 9 işçi birlikte kaç saatte bitirir?
   a) 60
   b) 56
   c) 54
   d) 48
   e) 39

4) 5 tane sayının aritmetik ortalaması 28'dir. Bu sayılara hangi sayı eklenirse aritmetik ortalaması 30 olur?
   a) 30
   b) 32
   c) 34
   d) 38
   e) 40

5) 17'den çıkarıldığında 15'in üçte ikisinden 4 fazla olan sayı kaçtır?
   a) 14
   b) 10
   c) 9
   d) 7
   e) 3

6) Bir adam bir binanın merdivenlerini ikişer ikişer çıkıp üçer üçer iniyor. İniş ve çıkışın tamamını toplam 60 adımda bitirdiğine göre merdiven kaç basamaklıdır?
   a) 90
   b) 84
   c) 80
   d) 72
   e) 60

7) % 40 zararla 120 TL ye satılan bir mal, % 20 karla kaç TL ye satılırdı?
   a) 120
   b) 200
   c) 240
   d) 250
   e) 260

8) Bankaya yıllık % 4 faizle yatırılan 300 TL 2 yıl sonra faiziyle birlikte kaç TL olur?
   a) 310
   b) 316
   c) 320
   d) 324
   e) 340

9) Bir araç iki şehir arasını 8 saatte gidiyor. Hızını saatte 30 km daha artırırsa iki şehir arasını 6 saatte gidecektir. Buna göre bu şehirler arası kaç km'dir?
   a) 320
   b) 460
   c) 540
   d) 620
   e) 720

10) Şeker yüzdesi % 60 olan 20 kg şekerli suya 6 kg şeker, 10 kg su katılırsa elde edilen karışımın şeker oranı yüzde kaç olur?
   a) 55
   b) 50
   c) 45
   d) 40
   e) 35

Cevap Anahtarı

1.b, 2.a, 3.b, 4.e, 5.e, 6.d, 7.c, 8.d, 9.e, 10.b

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1]. Balcı, M. (1999). *Matematik Analiz* (1. Cilt). ISBN: 975-6683-02-03. Ankara: Balcı Yayınları.

[2]. Sağel, M.K. ve Aktaş, M. (2010). *Genel Matematik 1,* ISBN: 975-8792-03-2, Ankara, Pegem Akademi.

[3]. Aytar, H ve Arslantaş, S., (2012). Ortaöğretim Matematik 9 Ders Kitabı, ISBN: 978-975-9168-04-9, Dikey Yayıncılık.

LİNEER DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Lineer Denklem kavramını öğrenecek,
  - Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo, grafik ve denklem ile ifade edebilecek,
  - Günlük hayatta karşılaştığınız matematiksel problemleri lineer denklem olarak yazabilecek,
  - Birinci ve ikinci dereceden eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulabileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Abdullah MAĞDEN

ÜNİTE

5

LİNEER DENKLEM

- Lineer Denklem
- İki Değişkenli Lineer Denklem Grafiği
- Yatay ve Düşey Doğrular
- İki Doğrunun Birbirlerine Göre Konumu

EŞİTSİZLİKLER

- Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik
- Eşitsizlik Özellikleri
- İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik
- Eşitsizlikler ve Grafik Gösterimi
- Mutlak Değerli Eşitsizlikler

GİRİŞ

Doğrusal denklem ve Lineer denklem ifadeleri birbirlerinin yerine kullanılırlar.

Denklem ve eşitsizlik kavramlarının ne olduğu hakkında genel bir bilgiye sahip olduğunuzu biliyoruz. Denklemler yazılış biçimlerine, ihtiva ettiği terimlere bağlı olarak çeşitli isimler ile ifade edilmektedir. Bu ünitede, birinci başlıkta Lineer Denklemler ikinci başlıkta ise Eşitsizlikler tanıtılacaktır. “Doğrusal bağlantı nedir? Birbirine bağlı olarak meydana gelen çeşitli olaylar arasındaki ilişkiler nasıldır? Bu ilişkiler matematiksel olarak nasıl ifade edilebilir?” soruları ile sıkça karşılaşırız. Mesela, bir taksiye bindiğimizde taksimetre açılış ücretinden sonra gidilen her kilometre için bir ücret yazıldığını hepimiz görmüşüzdür. Buna göre gidilen mesafe ile ücret arasında bir ilişkinin olduğunu biliriz. Bu ve bunun gibi olaylar arasındaki ilişkiyi ifade edebileceğimiz bazı denklemlere doğrusal denklem adını vereceğiz. Matematikte olduğu kadar, mühendislik, ekonomi, fizik vb. gibi alanlarda birçok problem doğrusal (lineer) denklem biçiminde ifade edilebilirler. Doğrusal (lineer) denklem, terimlerinin her biri ya birinci dereceden değişken ya da bir sabit olan denklemlerdir. Böyle denklemlere "doğrusal (lineer) " denmesinin nedeni içerdikleri terim ve değişkenlerin sayısına bağlı olarak düzlemde ya da uzayda bir doğru belirtmesindendir. Ayrıca Lineer denklemin özel durumda grafiğinin nasıl olduğu hakkında bilgiler verilecektir. Eşitsizlikler bölümünde bir bilinmeyenli birinci ve ikinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümelerinin nasıl bulundukları tablolar oluşturularak örnekleriyle açıklanacaktır. Ayrıca, iki bilinmeyenli birinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümeleri bulunacaktır.

LİNEER (DOĞRUSAL) DENKLEM

Lineer Denklemler

$ax+b=0, a\neq 0$ biçimindeki denklemlere bir bilinmeyenli lineer denklem, $ax+by+c=0$, $a\neq 0, b\neq 0$ biçimindeki denklemlere ise iki bilinmeyenli lineer denklem denir.

3. Ünite’de denklemleri ve 4. Ünite’de ise denklem kurma problemlerini öğrenmiştik. Bu ünitede lineer (doğrusal) denklemin ne olduğunu ve bu denklemlerin çözümlerini inceleyeceğiz.

Tanım 5.1

$a, b \in \mathbb{R}$ reel sayılar x bilinmeyen olmak üzere $ax+b=0, a\neq 0$ biçimindeki denklemlere bir bilinmeyenli lineer denklem adı verilir.

Bir bilinmeyen içeren bir denklemin çözümü, değişkenin yerine yazıldığında denklemi sağlayan sayıdır. $ax+b=0$ lineer denklemi için çözüm $x=-b/a$ sayısıdır.

Bundan sonra bilinmeyene değişken adını vereceğiz.

Örnek

•$2x - 5 = 0$ lineer denkleminin çözümü $x = 5/2$ sayısıdır.

İki ya da daha çok değişkenli lineer denklem tanımı benzer olarak yapılır. Biz bu ünitede bir ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerle ilgileneceğiz.

Tanım 5.2

$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ reel sayılar x, y bilinmeyenler (değişkenler) olmak üzere $ax + by + c = 0$ biçimindeki denklemlere iki bilinmeyenli lineer denklem adı verilir.

İki bilinmeyenli (değişkenli) lineer denklemin bir çözümü, denklemi sağlayan bir sıralı reel sayı ikilisidir. Bir değişkenli lineer denklemin çözümü bir tek reel sayı idi. İki değişkenli lineer denklemin çözümünün çok sayıda sıralı reel sayı ikilileri olduğuna dikkat etmeliyiz.

Eğimi m ve geçtiği bir noktası (x_1, y_1) olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ biçimindedir.

Örnek

•$2x - 3y + 3 = 0$ lineer denkleminin bir çözümü $(0,1)$ sıralı reel sayı ikilisidir. Denklemin bir başka çözümü ise $(-\frac{3}{2}, 0)$ ikilisidir. Benzer olarak başka sıralı ikililer de bulunabilir.

İki bilinmeyenli lineer denklemin çözümlerini bulmak için bilinmeyenlerden biri yerine keyfi bir sayı yazılır. Elde edilen yeni denklemden diğer bilinmeyen çözülür. Yukarıdaki örnekte, $x = 0$ yazılırsa, $-3y + 3 = 0$ ve buradan da $y = 1$ bulunur. Buna göre denklemin *bir çözümü* olarak $(0,1)$ sıralı ikilisi elde edilmiş olur.

İki Değişkenli Lineer Denklem Grafiği

$ax + by + c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ lineer denklemin çözümü olan sıralı ikililer bir doğru üzerinde bulunurlar. Bu doğru, iki değişkenli lineer denklemin grafiği olarak adlandırılır. $ax + by + c = 0$ eşitliğinden $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ yazılır. $-\frac{a}{b} = m, -\frac{c}{b} = n$ olarak alınırsa, $y = mx + n$ biçiminde doğru denklemi elde edilmiş olur. Şekil 5.1'deki grafiği inceleyiniz.

Denklemdeki m *katsayısına doğrunun eğimi denir.*

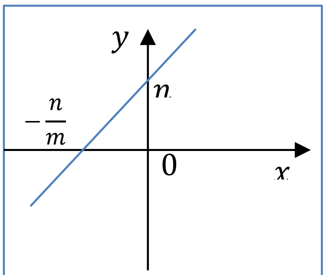
Eğimi m ve geçtiği bir noktası (x_1, y_1) olan doğrunun denklemi

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

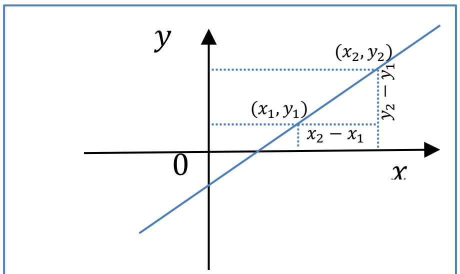
biçimindedir. Benzer olarak İki noktası (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) biçiminde verilen doğrunun denklemini $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
olmak üzere

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

biçiminde yazılır. Şekil 5.2'deki grafiği inceleyiniz.



Şekil 5.1



Şekil 5.2

Örnek

•Eğimi 2 olan ve $(1, -3)$ noktasından geçen doğru denklemini bulunuz.

Çözüm:

Eğimi ve geçtiği bir noktası verilen doğrunun denklemi

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

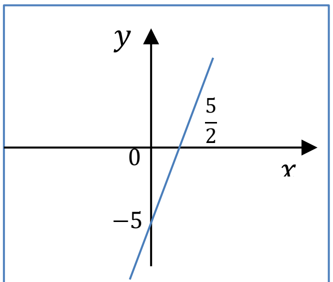
biçiminde idi. Buna göre doğrunun denklemi

$$y - (-3) = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 5$$

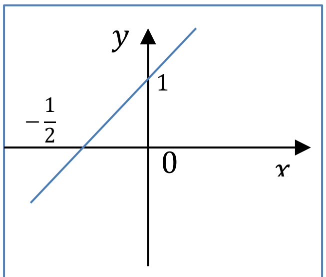
biçiminde elde edilir. Grafiği inceleyiniz (Şekil 5.3).

Örnek

$2x - y + 1 = 0$ doğrusunu çiziniz.
$x = 0$ için $y = 1$, $(0,1)$ sıralı ikilisi bir çözüm ve $y = 0$ için $x = -1/2$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ sıralı ikilisi de bir diğer çözüm olur. Bu sıralı ikililer koordinat sisteminde işaretlenip bu noktalardan geçen doğru çizilir. Grafiği inceleyiniz (Şekil 5.4).



Şekil 5.3



Şekil 5.4

$y = mx + n$ doğrusunun grafiğini çizmek için, doğrunun eksenleri kestikleri noktaları işaretleyip bu noktalardan geçen düz bir çizgi çizmek yeterlidir.

Bireysel Etkinlik

- $y = 3x + 1$ doğrusunun grafiğini çiziniz ve benzer örnekleri siz oluşturunuz.
- $2y - 3x + 1 = 0$ doğrusunun eğimini bulunuz.
- $2x - 4y = 1$ doğrusunun eksenleri kestikleri noktaları bulunuz.

$ax + by + c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ lineer denklemi, $A = -\frac{c}{a}$, $B = -\frac{c}{b}$ olmak üzere

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$$

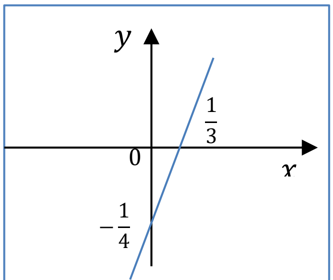
biçiminde de yazılabilir. Bu denklemde $x = 0$ yazılırsa, $y = B$ ve benzer olarak $y = 0$ yazılırsa, $x = A$ bulunur. Yani, doğru denklemindeki paydada bulunan sayılar doğrunun sırasıyla koordinat eksenlerini kestikleri noktalardır. Koordinat eksenleri üzerinde bu uzunluklar işaretlenip birleştirilerek doğrunu grafiği çizilir.

Örnek

- $3x - 4y - 1 = 0$ doğrusunu çiziniz.

Çözüm:

Verilen doğru denklemi $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{4}} = 0$ biçiminde yazılır. Buna göre doğru, x ekseninin $\frac{1}{3}$, y eksenini ise $-\frac{1}{4}$ noktalarında keser. Bu noktalar koordinat ekseninde işaretlenip birleştirilir ise doğru grafiği çizilmiş olur. Aşağıdaki grafiği (Şekil 5.5) inceleyiniz.



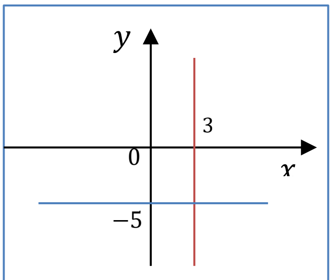
Şekil 5.5

Bu doğru üzerindeki tüm noktalar lineer denklemin çözümleridir.

$y = mx + n$ doğrusu üzerindeki tüm noktalar lineer denklemin bir çözümüdür.

Yatay ve Düşey Doğrular

$\boldsymbol{ax + by + c = 0, a \neq 0, b \neq 0}$ doğru denkleminde $\boldsymbol{b = 0}$ alınırsa $\boldsymbol{x = -\frac{c}{a}}$ doğrusu bulunur. Bu doğru düşey doğru veya $\boldsymbol{y}$ eksenine paralel doğru adını alır. Benzer olarak $\boldsymbol{a = 0}$ alınırsa $\boldsymbol{y = -\frac{c}{b}}$ doğrusu bulunur. Bu doğru yatay doğru veya $\boldsymbol{x}$ eksenine paralel doğru adını alır.



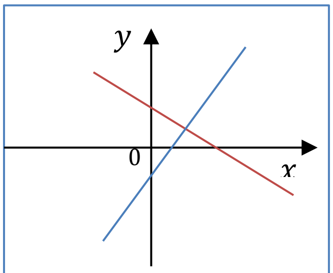
Şekil 5.6

Yandaki grafikte (Şekil 5.6) $\boldsymbol{x = 3}$ ve $\boldsymbol{y = -2}$ doğruları verilmiştir.

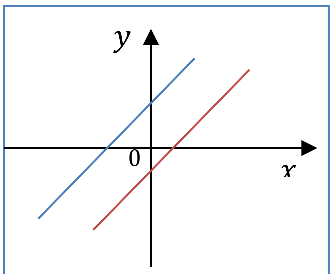
İki Doğrunun Birbirlerine Göre Konumu

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ lineer denklemleri ile verilen doğrularının birbirlerine göre konumlarını inceleyelim. Düzlemde doğrular ya tek bir noktada kesişirler, ya paraleldirler veya çakışıktırlar. Eğer

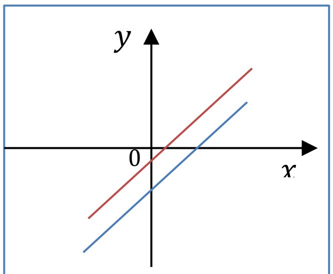
- $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise doğrular tek bir noktada kesişirler (Şekil 5.7),
- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ise doğrular paraleldir (Şekil 5.8),
- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise doğrular çakışıktır (Şekil 5.9).



Şekil 5.7



Şekil 5.8



Şekil 5.9

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ lineer denklemleri ile verilen doğrular ya tek bir noktada kesişirler ya paraleldir ya da çakışıktırlar.

Örnek

•$3x - y + 1 = 0$ ve $x + y + 4 = 0$ doğrularının birbirlerine göre konumlarını inceleyiniz. Varsa kesişme noktasını bulunuz.

Çözüm: Birinci denklemde y değeri çözülürse, $y = 3x + 1$ bulunur. Bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa, $x + y + 4 = x + 3x + 1 + 4 = 0$ ve buradan da $4x + 5 = 0$ bulunur. Bu eşitlikten de $x = -\frac{5}{4}$ elde edilir. Bulunan bu değer yukarıdaki doğru denklemlerinin herhangi birinde yerine yazılırsa, $y = -\frac{11}{4}$ bulunur.

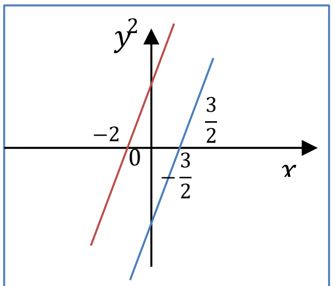
Örnek

• $x - y + 2 = 0$ ve $-2x + 2y + 3 = 0$ doğrularının birbirlerine göre konumlarını inceleyiniz.

Çözüm:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

olduğundan doğrular paraleldir (Şekil 5.10).



Şekil 5.10

EŞİTSİZLİKLER

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ reel sayılar olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leq 0$ biçimindeki ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir.

Eşitsizliklerin çözüm kümelerinin sonsuz elemanlı kümeler olduklarını biliyoruz. Burada, birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler, ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler ve birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler incelenip çözüm kümeleri bulunacaktır.

$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ reel sayılar olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ ve $ax + b \leq 0$ biçimindeki ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir. Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözüm kümeleri bulunurken, $ax + b = 0$ denkleminin çözümü bulunup eşitsizliği sağlayan noktalar kümesinin $x = -\frac{b}{a}$ noktasının sağında kalan küme mi yoksa solunda kalan küme mi olduğuna bakılır. Bunun için işaret inceleme tablosu adını verdiğimiz aşağıdaki gibi bir tablo oluşturulur (Tablo 5.1). Verilen eşitsizliğe uygun olan aralık çözüm kümesi olarak bulunur.

	Tablo 5.1		
x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax + b$	a ile zıt işaretli	0	a ile aynı işaretli

Örnek

•$3x - 1 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki tabloya göre işaret incelemesi yapılırsa,

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
$3x - 1$	-	0	+

olur. Buna göre $3x - 1 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $x \geq 1/3$ olan noktalar kümesidir.

Örnek

•$-2x + 6 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Verilen eşitsizliğe göre işaret inceleme tablosu oluşturulursa,

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x + 6$	+	0	-

olur. Buna göre , $-2x + 6 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $x < 3$ yani, 3'ten küçük olan tüm reel sayılar kümesidir.

Eşitsizlik Özellikleri

Eşitsizliğin çözüm kümesinin bulunmasında kolaylıklar sağlayan özellikleri şöyle sıralayabiliriz:

- Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı reel sayı eklenir veya çıkartılırsa eşitsizlik yönü değişmez.
- Bir eşitsizliğin her iki yanı pozitif sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yönü değişmez.
- Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

Örnek

•$-2x + 6 < 3(x - 2) + 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Bir eşitsizliğin her iki yanına aynı reel sayı eklenir veya çıkartılırsa eşitsizlik yönü değişmez. Bir eşitsizliğin her iki yanı pozitif sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yönü değişmez. Bir eşitsizliğin her iki yanı negatif bir sayı ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

Çözüm: $-2x + 6 < 3(x-2) + 5$ eşitsizliğine yukarıda belirtilen özellikler uygulanarak gerekli işlemler yapılırsa,

$-2x + 6 < 3x - 6 + 5$

$-2x - 3x < -6 - 6 + 5,$ x'li terimler bir tarafa sayılar bir tarafta toplanır,

$-5x < -7$, Eşitsizliğin her iki tarafı -5 ile bölünür.

Buna göre $x > 7/5$ bulunur.

Örnek

• $\frac{2x-1}{x+2} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Eşitsizlikte verilen pay ve paydadaki ifadelerin işaret incelemesi ayrı ayrı yapılıp bölümün işareti incelenir.

x	$-\infty$	-2		1/2	$+\infty$
$2x-1$	-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+
$\frac{2x-1}{x+2}$	+	0	-	0	+

Yukarıdaki tabloya göre eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty, -2) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ biçiminde bulunur.

Eşitsizliklerin çözüm kümeleri aralık olarak da yazılabilir. 2. Ünite'de aralık kavramından bahsedilmişti. Hatırlamak maksadıyla eşitsizliklerin aralık olarak gösterimi aşağıdaki gibi bir tablo ile verilebilir [2]:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ve $ax^2 + bx + c \leq 0$ biçimindeki ifadelere ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

Tablo 5.2

Eşitsizlik Gösterimi	Aralık Gösterimi
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a \leq x < b$	$[a, b)$
$a < x \leq b$	$(a, b]$
$a < x < b$	(a, b)
$x \leq b$	$(-\infty, b]$
$x \geq a$	$[a, \infty)$
$x \leq b$	$(-\infty, b]$
$x < b$	$(-\infty, b)$
$x \geq a$	$[a, \infty)$
$x > a$	(a, ∞)

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$ax^2+bx+c>0, ax^2+bx+c\geq 0, ax^2+bx+c<0$ ve $ax^2+bx+c\leq 0$ biçimindeki ifadelere ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir. Bu tür eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulmak için ax^2+bx+c ifadesinin işaretinin incelenmesi kullanılır. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alacağız.

- $\Delta = b^2-4ac>0$ ise $a\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+bx+c=0$ denkleminin iki farklı kökünün olduğunu biliyoruz. Bu kökler $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1,2}}=\frac{-\boldsymbol{b}\pm\sqrt{\Delta}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$ ile bulunur. $a\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+bx+c$ ifadesinin işaret inceleme tablosu aşağıdaki gibi yapılır (Tablo 5.3)[6].

Tablo 5.3					
x	$-\infty$	x_1		x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	a ile aynı işaretli	0	a ile zıt işaretli	0	a ile aynı işaretli

Örnek

$3x^2-2x-1\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$3x^2-2x-1=0$ denkleminin kökleri bulunursa, $\Delta = b^2-4ac=4-12=16$ olup $x_1=1, x_2=-\frac{1}{3}$ bulunur. Buna göre işaret inceleme tablosu

x	$-\infty$	$-1/3$		1	$+\infty$
$3x^2-2x-1$	+	0	-	0	

biçiminde olur. O hâlde verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$ biçiminde elde edilir.

- $\Delta = b^2-4ac=0$ ise $a\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+bx+c=0$ denkleminin çakışık iki kökünün olduğunu biliyoruz. Bu kökler $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}=\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}=\frac{-\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}}$ ile bulunur. $a\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+bx+c$ ifadesinin işaret inceleme tablosu aşağıdaki gibi yapılır (Tablo 5.4).

Tablo 5.4				
x	$-\infty$	$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	a ile aynı işaretli	0	a ile aynı işaretli	

Örnek

$x^2 - 2x + 1 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin kökleri bulunursa, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ olup $x_1 = x_2 = 1$ bulunur. Tablo 5.4'e göre işaret inceleme tablosu

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = 1$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	0	

biçiminde olur. Tabloya bakılırsa verilen ikinci dereceden ifadenin hiçbir yerde negatif olmadığı görülür. Bu ise $x^2 - 2x + 1 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi boş küme olur. $Ç = \emptyset$.

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin reel kökleri yoktur. Bu hâlde $a\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + bx + c$ ifadesinin işaret inceleme tablosu aşağıdaki gibi yapılır (Tablo 5.5).

Tablo 5.5		
x	$-\infty$	$+\infty$
$a\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + bx + c$	a ile aynı işaretli	

Örnek

$2x^2 + 3x + 1 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$2x^2 + 3x + 1 = 0$ denkleminin kökleri bulunursa, $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 24 < 0$ olup denklemin reel kökleri yoktur. Buna göre işaret inceleme tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 + 3x + 1$	+	+

Örnek

$\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Pay ve paydanın işaret incelemesi ayrı ayrı yapılıp bölüm göz önüne alınarak eşitsizliğin çözüm kümesini buluruz.

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
x^2+x-2		+		+	0	-	0			+	
x^2+x-6		+	0			-		-	0		
$\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6}$		+		-	0	+	0	-		+	

Yukarıdaki tablonun son satırına bakılırsa, eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty,-3) \cup (-2,1) \cup (2,+\infty)$ olur.

$ax+by+c>0$, $ax+by+c \geq 0$, $ax+by+c<0$ ve $ax+by+c \leq 0$ biçimindeki cebirsel ifadelere de birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik adı verilir.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler (Lineer Eşitsizlikler) ve Grafik Gösterimi

Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklere benzer olarak $\boldsymbol{ax}+by+c>0, \boldsymbol{ax}+by+c \geq 0, \boldsymbol{ax}+by+c<0$ ve $\boldsymbol{ax}+by+c \leq 0$ biçimindeki cebirsel ifadelere de birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik adı verilir. Bu tür eşitsizliklerin çözüm kümeleri ise $\boldsymbol{ax}+by+c=0$ doğrusunun bir tarafında kalan bölgeler olarak bulunur.

$ax+by+c=0$ biçimindeki doğru denklemi düzlemi üç bölgeye ayırır. Bu bölgeler

$$B_1 = \{(x,y): ax+by+c=0, x, y \epsilon \mathbb{R}\},$$

$$B_2 = \{(x,y): ax+by+c>0, x, y \epsilon \mathbb{R}\},$$

$$B_3 = \{(x,y): ax+by+c<0, x, y \epsilon \mathbb{R}\}$$

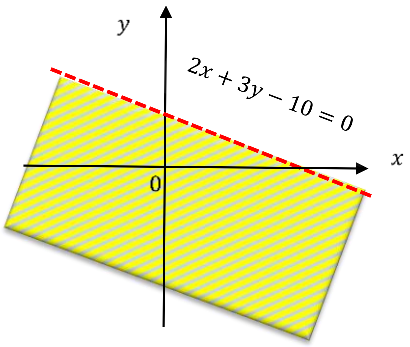
kümeleridir. Bu tür eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulmak için yukarıdaki kümelerden herhangi birine dâhil olduklarını göstermek yeterlidir.

Örnek

•$2x+3y-10<0$ eşitsizliğinin sağlandığı bölgeyi grafikle gösteriniz.

Çözüm: $2x+3y-10=0$ doğrusunu çizelim. Verilen eşitsizlikte $x=0$ ve $y=0$ yazılırsa $-10<0$ elde edilir. Bu ise başlangıç noktasının da içinde bulunduğu şekildeki taralı bölgenin eşitsizliğin temsil edildiği bölgenin doğrunun altında kalan taralı kısım olduğunu gösterir. Verilen eşitsizlik doğru üzerindeki noktaları içermediğinden doğrunun grafiği kesikli çizgiler ile gösterilmiştir (Şekil 5.11).

$ax + by + c > 0$, $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c < 0$ $ax + by + c \leq 0$ biçimindeki eşitsizliklerin çözüm kümelerini kolay yoldan bulmak için $x = 0$ ve $y = 0$ değerleri yerine yazılarak bu noktaların çözüm kümesi içinde olup olmadığı tespit edilir. Uygun olan bölge taranır (Şekil 5.11).

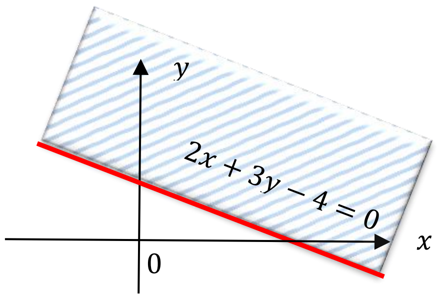


Şekil 5.11

Örnek

•$2x + 3y - 4 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bölgeyi grafikle gösteriniz.

Çözüm: $2x + 3y - 4 = 0$ doğrusunu çizelim. Verilen eşitsizlikte $x = 0$ ve $y = 0$ yazılırsa $-4 \geq 0$ yani, negatif bir sayı sıfırdan büyük çıkar. Negatif sayı sıfırdan küçük olacağından bu bir çelişkidir. Bu ise başlangıç noktasının aranan bölge içinde olmadığını gösterir. Buna göre, şekil 5.12'deki taralı bölge eşitsizliğin sağlandığı bölgedir. Verilen eşitsizlik doğru üzerindeki noktaları da içermektedir.



Şekil 5.12

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Bir $x \epsilon \mathbb{R}$ sayısının mutlak değeri $|x|$ ile gösterilir ve

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanıma göre bir sayının mutlak değeri daima pozitif bir sayıdır. Tanıma göre mutlak değer için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$$

$|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k$ veya $x \geq k$

$|x| = k \Leftrightarrow x = k$ veya $x = -k$

Ayrıca, mutlak değer ile ilgili

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|$$

özellikleri de yazılabilir.

$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$
$|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k$ veya $x \geq k$
$|x| = k \Leftrightarrow x = k$ veya $x = -k$
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bir sayının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına uzaklığıdır.

Örnek

• $|x - 3| \leq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Mutlak değerin özellikleri göz önüne alınırsa,

$$|x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki yanına 3 ilave edilerek

$$-2 \leq x \leq 8$$

bulunur. O hâlde eşitsizliğin çözüm kümesi

$$Ç = \{x\epsilon\mathbb{R} : \ -2 \leq x \leq 8\} = [-2, 8]$$

olarak yazılır.

Örnek

• $|x - 1| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Mutlak değer özelliklerine göre

$$x - 1 \geq 5 \ veya \ x - 1 \leq -5$$

yazılır. Buna göre , $x \geq 6$ veya $x \leq -4$ bulunur. O hâlde çözüm kümesi $Ç = (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$ olur.

Örnek

• $|x - 1| < 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Mutlak değerin özellikleri göz önüne alınırsa,

$$|x-1|<7 \Leftrightarrow -7<x-1<7$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki yanına 1 eklenirse

$$-6<x<8$$

bulunur. O hâlde eşitsizliğin çözüm kümesi

$$Ç=\{x\epsilon\mathbb{R}: \ -6<x<8\}=(-6,8)$$

olarak yazılır.

Bir sayının mutlak değeri, sayı doğrusu üzerinde bu sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığıdır.

Örnek

- $\left|\frac{-1}{x-1}\right|>4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: $\left|\frac{-1}{x-1}\right|>4$ eşitsizliği yukarıdaki özellikler göz önüne alınarak düzenlenirse,

$$\left|\frac{-1}{x-1}\right|>4 \Rightarrow \frac{|-1|}{|x-1|}>4 \Rightarrow 1>4|x-1| \Rightarrow \frac{1}{4}>|x-1|$$

$$|x-1|<\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4}<x-1<\frac{1}{4}$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki yanına 1 eklenirse

$$\frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}$$

elde edilir. $\frac{-1}{x-1}$ teriminin $x=1$ değeri için tanımlı olmadığı da göz önüne alınarak eşitsizliğin çözüm kümesi

$$(\frac{3}{4},1)\cup(1,\frac{5}{4})$$

biçiminde bulunur.

Bireysel Etkinlik

- Yukarıdaki eşitsizlik örneklerinin benzerlerini siz kurunuz ve çözüm kümelerini inceleyiniz.
- $x-2y+2\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini grafikle gözteriniz.

Özet

- Bu ünitede, birinci başlıkta Lineer Denklemler ikinci başlıkta ise Eşitsizlikler verilmiştir.
- $a, b \epsilon \mathbb{R}$ reel sayılar, x bilinmeyen olmak üzere $ax + b = 0$ biçimindeki denklemlere bir bilinmeyenli lineer denklem adı verilir.
- $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ reel sayılar, x ve y bilinmeyenler olmak üzere $ax + by + c = 0$ biçimindeki denklemlere iki bilinmeyenli lineer denklem adı verilir.
- Bir ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerin ve lineer eşitsizliklerin çözümleri örnekleri ile incelenmiştir.
- İki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm kümeleri grafikle gösterilmiştir.
- Lineer denklemin özel durumda grafiklerinin nasıl olduğu hakkında bilgiler verilmiştir.
- Eşitsizlikler bölümünde bir bilinmeyenli birinci ve ikinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümelerinin nasıl bulundukları tablolar oluşturularak örnekleriyle açıklanmıştır. Ayrıca, iki bilinmeyenli birinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümeleri bulunmuştur.
- $ax + b \geq 0, ax + b > 0, ax + b \leq 0$ ve $ax + b < 0$ biçimindeki ifadelere ise birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik adı verilr.
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler verilerek çözüm kümelerinin nasıl bulundukları anlatılmıştır.
- Bir ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerin ve lineer eşitsizliklerin çözümleri örnekleri ile incelenmiştir.
- Mutlak değerli eşitsizlikler tanıtılarak örnekler verilmiştir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $3x - 2 = 0$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $x = 2$
   b) $x = -2$
   c) $x = 2/3$
   d) $x = -2/3$
   e) $x = 3/2$

2. $3x - 9 < 0$ eşitsizliğinini çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $(-\infty, 3)$
   b) $(-\infty, -3)$
   c) $(-\infty, 3]$
   d) $(3, +\infty)$
   e) $[3, +\infty)$

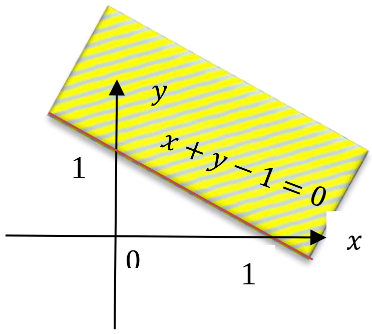
3. $\frac{2x-3}{x+1} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $(-\infty, -1)$
   b) $(-1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$
   c) $[\frac{3}{2}, +\infty)$
   d) $(-\infty, +\infty)$
   e) $(-\infty, -1) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$

4. $3(x - 2) > 2(x + 1) + 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $(-\infty, -13)$
   b) $(13, +\infty)$
   c) $(-13, +\infty)$
   d) $(-\infty, +\infty)$
   e) $(-13, +13)$

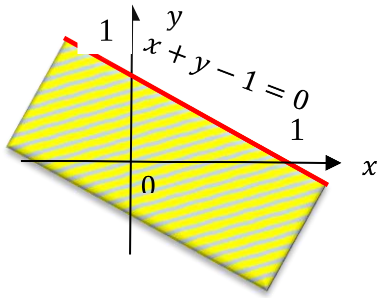
5. $|3 - 2x| \leq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $[-2, +2]$
   b) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
   c) $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$
   d) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$
   e) $[\frac{5}{2}, +\infty)$

6. $x + y - 1 \geq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bölge aşağıdakilerden hangisidir?

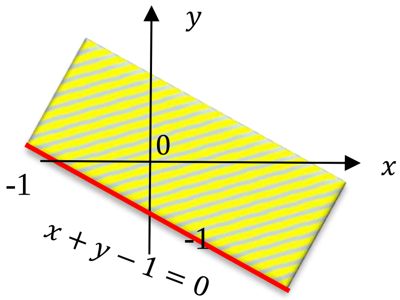
a)



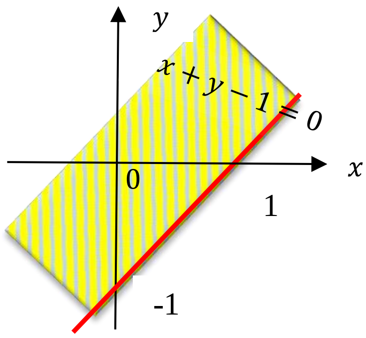
b)



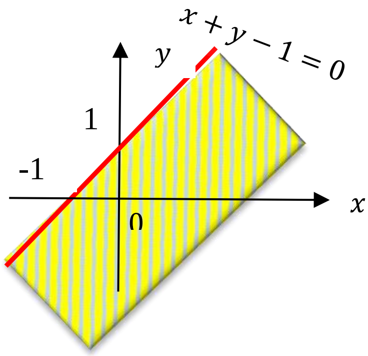
c)



d)



e)



7. $3x^2 - 7x + 2 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(-\infty,\ 1/3]$

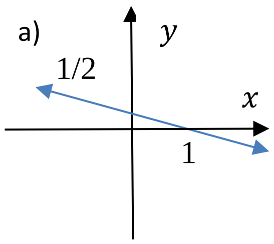
b) $(-\infty, 1/3] \cup [2, +\infty)$

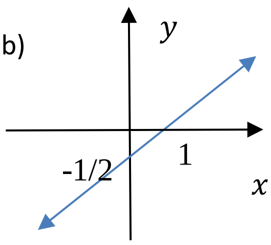
c) $(2, +\infty)$

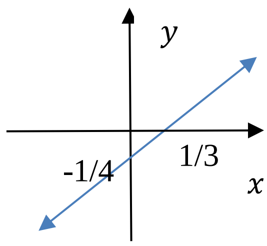
d) $(\frac{1}{3}, 2)$

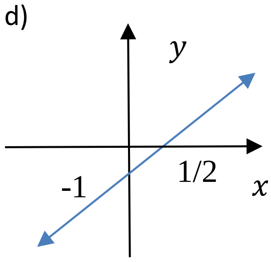
e) $[\frac{1}{3}, 2]$

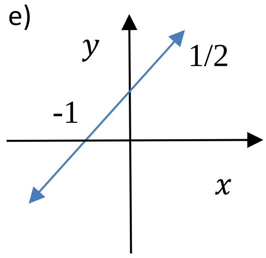
8. $x - 2y = 1$ lineer denkleminin temsil ettiği doğru aşağıdakilerden hangisidir?

a)


b)


c)


d)


e)


9. Eğimi 3, geçtiği bir noktası (-3,2) olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = 3x - 2$
   b) $y = -3x + 2$
   c) $y = 3x - 11$
   d) $y = 3x + 3$
   e) $y = 3x + 11$

10. $2x - 5y + 1 = 0$ lineer denkleminin bir çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
   a) (0, 5)
   b) (2, 0)
   c) (5, 2)
   d) (0, - 1/5)
   e) (- 1/2, 1/5)

Cevap Anahtarı

1.c, 2.a, 3.e, 4. b, 5.c, 6.a, 7. d, 8.b, 9. e, 10. d

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Brown R.G., (1997). *Advanced Mathematics.* Boston: McDougal Littell Inc.

[2] Barnet M.A., Ziegler M.R., Byleen K.E., Calculus. Pearson Yayınları.

[3] Dowling E.T., (1993). *İşletme ve İktisat için Matematiksel Yöntemler*(Çeviri). Schaum's Outline Series, New York: McGraw-Hill

[4] Glass C.J., (1997*). İktisatta Matematiksel Yöntemlere Giriş.* (Çeviri). İstanbul: Der Yayınları

[5] Haeussler E.F. (2010). *Temel Matematiksel Analiz.* (Çeviri). New Jersey: Prentice Hall.

[6] Kadıoğlu E., Kamali M., (2013) Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi

[7] Kobu B., (1997). *İşletme Matematiği*. İstanbul: Avcıol Basın Yayın.

LİNEER DENKLEM VE EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu Üniteyi çalıştıktan sonra;
- Matematiksel Modelin ne olduğunu anlayabilecek,
  - Matematiksel denklem kurmayı anlayabilecek,
  - Denklemlerin problem çözümlerinde nasıl kullanıldığını kavrayabilecek,
  - Günlük hayatta zor görünen konuları matematiksel modelleyerek kolayca çözebilecek,
  - Eşitsizliklerin anlamlarını kavrayabileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Abdullah MAĞDEN

ÜNİTE 6

LİNEER DENKLEM UYGULAMALARI

- Lineer Denklem Uygulamaları
- İki bilinmeyenli Lineer Denklem Uygulamaları
- Arz- Talep ve Denge İçin Lineer (Doğrusal Model)
- Başabaş Analizi

EŞİTSİZLİK UYGULAMALARI

- Eşitsizlik Uygulamaları
- Değerlendirme Soruları

GİRİŞ

İnsanlar günlük hayatlarında farkında olsun veya olmasın birçok problemin çözümü için zihninden denklem kurar ve çözüm yapar. Cebirsel işlemlerin yararını anlayabilmek için günlük hayatta karşılaşılan problemlerin matematiksel olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Çoğu zaman problemleri çözmek için problemde verilen duruma uygun düşen bir matematiksel ifade oluşturulur. Buna matematiksel modelleme denir. Matematiksel modellemelerde sıklıkla lineer denklemler ve eşitsizliklerle karşılaşılır. Eğitim öğretim dönemlerinde karşılaştığımız iş-işçi problemleri, havuz problemleri, faiz hesaplamaları, karışım problemleri vb. problemlerin birçoğu lineer denklemler oluşturularak çözülürler.

Ömer Hayyam, Üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklemlerle ilgili yazdığı bir eserinde cebirsel denklemin bilinmeyenine Arapça’da “Şey” anlamına gelen kelimeyi kullanmıştır. Daha sonra bu eseri diğer dillere çevirilirken İspanyolcada “Xay” olarak geçmiştir. Zamanla X biçimini almış ve bilinmeyeni göstermek için kullanılan evrensel X harfine dönüşmüştür. (https://tr.wikipedia.org/wiki/%C3%96mer_Hayyam).

Bir ürünün fiyatı, serbest piyasadaki talebi ve piyasaya arzı (sunumu) arasında her zaman bir ilişki vardır. Bu ilişki çeşitli matematik modellerle ifade edilebilir. Bu modellemelerde biri de doğrusal (lineer) modeldir. Ürün fiyatını değişken olarak kabul edersek arz ve talep miktarlarını fiyata bağlı olarak lineer bir denklemle ifade edebiliriz. Arz ve talep miktarlarının eşit olduğu fiyata *denge fiyatı* denir. Denge fiyatına karşılık gelen arz-talep miktarlarına ise denge miktarları denir. (*denge fiyatı, denge miktarı*) ikilisine denge noktası veya denge durumu adı verilir. Fiyat arttıkça arz artacağından, talep ise azalacağından arz denklemini artan bir doğru ile talep denklemini de azalan bir doğru ile temsil edilir.

Birinci bölümde Lineer Denklem Uygulamaları ile ilgili uygulamalara yer verilmiş, özel olarak ekonomide çok karşılaşılan arz-talep modeli ve başabaş analizi gibi uygulamalara ait örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise zaman zaman karşılaştığımız alternatiflerin hangilerinin daha uygun olacağına karar verebileceğimizi belirleyebilen eşitsizlik uygulamalarına dair örnekler verilmiştir.

LİNEER DENKLEM UYGULAMALARI

Denklem kurma problemlerine geçmeden önce oluşturulacak olan matematiksel modeli kısaca açıklayalım: Matematik model, basit olarak karşılaşılan problemleri çözüme kavuşturabilecek matematiksel sembollerle ifade edilmesi demektir. Genellikle keyfi değişen elemanlar için $x, y, z, \ldots$ sembollerini, sabitleri göstermek için ise $a, b, c, \ldots$ gibi harfleri kullanırız. Ekonomi, Mühendislik, Sosyal, vb. gibi uygulamalı alanlarda ise bu semboller alanın özelliğine göre değişebilir. Biz genelde matematik sembollerini tercih edeceğiz. Ama zaman zaman farklı semboller de kullanacağız.

Bu tür modellemeleri, iş-işçi, havuz vb. problemlerinden de hatırlayacaksınız. Modelleme oluşturmak ve çözüm yapmak için;

- Problemdeki bilinmeyen(lerden biri) için bir değişken belirleyiniz. Biz bilinmeyen için genellikle $x, y, z, \ldots$ gibi sembolleri kullanırız.
- Problemdeki diğer bilinen veya bilinmeyen miktarlar belirleyip değişken cinsinden ifade ediniz.

- Problemdeki veriler çerçevesinde bir matematik model oluşturunuz (denklem veya eşitsizlik).
- Denklemi veya eşitsizliği çözünüz.

Şimdi uygulama örneklerine geçebiliriz.

Modelleme oluşturmak ve çözüm yapmak için; Problemdeki bilinmeyen(lerden biri) için bir değişken belirleyiniz.

Problemdeki diğer bilinen veya bilinmeyen miktarlar belirleyip değişken cinsinden ifade ediniz.

Problemdeki veriler çerçevesinde bir matematik model oluşturunuz (denklem veya eşitsizlik).

Denklemi veya eşitsizliği çözünüz.

Lineer Denklem Uygulamaları

Şimdi güncel uygulamalara ait örnekleri verebiliriz. Daha fazla örneği [1]-[7] kaynaklarında bulabilirsiniz.

Örnek

- Bir kişi, İnternette satış yapan bir Teknomarket'ten 20 ₺ kargo masrafı ve %18 KDV dahil olmak üzere 2441.36 ₺ ye bir bilgisayar satın almıştır. Bu bilgisayarın satın alma fiyatı kaç ₺ dir?

Çözüm: Matematik modelin nasıl oluşturulduğunu daha iyi anlamamız için bu örneği adım adım çözelim.

- Bilinmeyen için bir değişken belirleyelim.

Bilgisayarın satın alma fiyatına x diyelim.

- Verilenlere göre ödenen ücretleri belirleyelim.

Kargo ücreti: 20 ₺

KDV : 0,18 x

- Toplam Maliyet: 2441.36 ₺

Denklemi oluşturalım

Fiyat + Kargo + KDV = Toplam Maliyet
$x + 20 + 0{,}18\,x = 2441.36$

- Denklem çözülerek yani x değeri bulunarak sonuç elde edilir. Yani,

$$x + 20 + 0.18\,x = 2441.36$$

$$(1.18)x = 2441.36 - 20 = 2421.36 \Rightarrow x = \frac{2421.36}{1.18} = 2052 \text{ ₺}$$

bulunur.

Örnek

- Bir miktar para üç kişi arasında eşit paylaşılacaktır. Eğer aynı para beş kişi arasında paylaşılsa idi her biri 5000 ₺ daha az para alacaktı. Buna göre paylaşılan para kaç liradır?

Çözüm: Paylaşılan para x lira olsun. Para üç kişi arasında eşit olarak paylaşılırsa bir kişinin alacağı para $\frac{x}{3}$ lira olur. Eğer 5 kişi arasında paylaştırılsa idi bir kişinin alacağı miktar $\frac{x}{5}$ olacaktı. Beş kişi arasındaki paylaşımda her kişi, üç kişi arasındaki paylaşıma göre 5000 ₺ daha az alacağına göre

$$\frac{x}{5} = \frac{x}{3} - 5000$$

eşitliği yazılır. Matematik modellemeden bir lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 5000 \Rightarrow \frac{2x}{15} &= 5000 \\ 2x &= 75000 \\ x &= 37500 \end{aligned}$$

bulunur. Yani, paylaşılan para 37500 TL olarak elde edilir.

Örnek

- Bir sayının 3 fazlasının $\frac{1}{5}$'i aynı sayının $\frac{1}{2}$'sinin 4 eksiğine eşittir. Buna göre, " bu sayı kaçtır? " probleminin matematiksel denklemini kurunuz.

Çözüm: Sayı x olsun. Bu sayının 3 fazlasının beşte biri $(x+3)\cdot\frac{1}{5}$ olur. Aynı sayının yarısının 4 eksiği $\frac{x}{2} - 4$ biçimindedir. Bu iki değer eşit olduklarından problemin cebirsel ifadesi

$$(x+3)\cdot\frac{1}{5} = \frac{x}{2} - 4$$

biçiminde bulunur. Bu denklem düzenlenirse daha basit bir görünümle $3x - 46 = 0$ biçiminde bir lineer denklem yazılır.

Örnek

- %40 karla 378 ₺'ye satılan bir ürünün maliyet fiyatını bulunuz.

Çözüm: Ürünün maliyetini x ile gösterlim. Buna göre %40 kârla satılan ürünün satış fiyatı 378 ₺ olup

$$x + \frac{40}{100}x = 378$$

eşitliği yazılır. *Yine bir lineer denklem elde edildiğine dikkat ediniz.* Bu denklemden x çözülürse, $x = 270$ ₺ olarak bulunur.

Örnek

- Bir firma birim başına 5 ₺ değişken maliyetli ve 50.000 ₺ sabit maliyetli bir ürün imal etmektedir. Ürünün birim satış fiyatı 15 ₺ dir. Firmanın 70.000 ₺ kar edebilmesi için satması gereken ürün miktarı ne olmalıdır?

Çözüm: Satılması gereken birim sayısı x olsun. Buna göre değişken maliyet $5x$ olur. Firma için toplam maliyet $5x + 50000$ olur. Ayrıca, x birimin satışından elde edilecek olan toplam gelir $15x$ dir. Buna göre,

Kâr = Toplam Gelir – Toplam Maliyet

olduğundan $70000 = 15x - (5x + 50000)$ olup bu denklem çözülürse $x = 12000$ elde edilir. Yani 70.000 ₺ kâr için 12.000 adet ürün satılmalıdır.

İki Bilinmeyenli Lineer Denklem Uygulamaları

$ax + by + c = 0$ biçimindeki lineer denklemi 5.üniteden biliyoruz. Bu denklem düzenlenerek $y = mx + n$ biçiminde de yazılabilir. Bu denkleme doğru denklemi de demiştik.

Lineer denklemler, genellikle üretim kısıtlamalarının açıklanmasında kullanılır.

Örnek

- Bir imalathanede 0,12 ₺ değişken maliyetli ve 124 ₺ sabit maliyetli bir ürün imal edilmektedir. x adet ürün için günlük üretim maliyetini bulunuz. Günlük toplam maliyetin 250 ₺ olabilmesi için kaç tane ürün üretilmelidir?

Çözüm: Günlük toplam üretim maliyetini y ile gösterirsek, $y = 0{,}12x + 124$ biçiminde bulunur. Bu denklemde $y = 250$ yazılırsa, $250 = 0{,}12x + 124$ elde edilir. Buradan da $250 - 124 = 0{,}12x \Rightarrow x = \frac{126}{0{,}12} = 1050$ bulunur.

Örnek

- Bir marangoz piknik masaları üretmektedir. Aylık sabit maliyet 1130 ₺ ve değişken maliyet her bir masa için 45 ₺ dir. x adet piknik masası üretimi için aylık üretim maliyetini bulunuz. Aylık toplam üretim maliyetin 4550 ₺ olması için kaç tane masa üretmelidir?

Çözüm: Aylık toplam üretim maliyetini y ile gösterelim. $y = 1130 + 45x$ aylık toplam üretim maliyeti olur. Aylık toplam üretim maliyetinin 4500 ₺ olması durumunda $4550 = 1130 + 45x$ elde edilir. Bu eşitlikten x değeri çözülürse $4550 - 1130 = 45x \Rightarrow 45x = 3420 \Rightarrow x = \frac{3420}{45} = 76$

Örnek

- Bir yatırımcı iki çeşit hisse senedine yatırdığı 50.000 ₺ için yılda 6.120 ₺ gelir elde etmektedir. Bu hisse senetlerinden biri %14 diğeri ise %12 gelir getirmiştir. Her hisse senedine ne kadar yatırılmıştır?

Çözüm: %14 lük kısma yatırılan miktar x olsun. %12'lik kısma yatırılan miktar ise $(50.000 - x)$ olur. Her iki hisse senedinden elde edilen gelire y dersek,

$$y = 0{,}14x + 0{,}12((50.000 - x)$$

olur. $y = 6120$ yazarsak

$$\begin{aligned}
&y = 0{,}14x + 0{,}12((50.000 - x) \\
&6120 = 0{,}14x + 0{,}12((50.000 - x) \\
&6120 = 0{,}14x + 6000 - 0{,}12x \\
&120 = 0{,}02x
\end{aligned}$$

$$x = 6000$$

bulunur. Yani, %14'lük kısım için 6000 ₺ yatırmıştır. Geriye kalan 44.000₺ ise %12 lik kısım için ayrılmıştır.

Örnek

• Bir yatırımcı 60.000 ₺'nin ne kadarını %11'den ve ne kadarını %15'ten bir finans kurumuna yatırmalı ki toplam yatırımından %14 gelir elde etsin?

Çözüm: %11'den yatırılan miktar x ise %15'ten yatırılan miktar $60.000 - x$ olur. Yıllık toplam gelire y denirse,

$$y = 0{,}11x + 0{,}15(60.000 - x)$$

biçiminde yazılır. Toplam yatırımdan %14 kazanmış olsa $60.000 \times 0{,}14 = 8400$ olurdu. Buna göre,

$$y = 0{,}11x + 0{,}15(60.000 - x)$$
$$8400 = 0{,}11x + 0{,}15(60.000 - x)$$
$$8400 = 0{,}11x + 9000 - 0{,}15x$$
$$-600 = -0{,}04x$$

$x = 15.000$

bulunur. %11'lik kısımdan yatırması gereken 15.000₺, %15'lik ksımdan ise 45.000 ₺ yatırması gerekmektedir.

Örnek

• Bir firma, ürettiği her bir ürün için değişken maliyet 7 ₺ ve sabit maliyeti 15 ₺ olarak belirlemiştir. Toplam maliyeti gösteren denklemi yazınız.

Çözüm: Ürün için x, toplam maliyet için ise y sembollerini kullanırsak, toplam maliyet denklemi $y = 7\,x + 15$ biçinimde lineer denklem olarak elde edilir. 150 birim üretilmişse toplam maliyet $y = 7 \cdot 150 + 15 = 1065$ ₺ bulunur.

Örnek

- Bir eczane maliyeti 35 ₺ olan bir ilacı 52 ₺'ye ve maliyeti 45 ₺ olan bir ilacı ise 64 ₺ 'ye satmaktadır. Buna göre
  - Eczane için brüt kar politikasının doğrusal (lineer) olduğu kabul edilirek, perakende fiyat y ile maliyet x ile gösterilmek üzere, y perakende fiyatını, x maliyeti cinsinden ifade eden denklemi bulunuz.
  - Perakende fiyatı 35 ₺ olan bir ilacı eczane kaç ₺ 'ye mal etmiştir.

Çözüm: Maliyet ve satış fiyatlarını (x, y) sıralı ikilileri olarak alırsak, verilere göre $(35, 52)$ ve $(45, 64)$ noktalarından geçen doğru denklemi aradığımız doğrusal modeli verir.

- Buna göre $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{64-52}{45-35} = \frac{12}{10} = 1{,}2$ olup

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

doğru denkleminde değerler yerine yazılırsa, satış fiyatı için

$$y - 52 = 1{,}2(x - 35) \Rightarrow y = 1{,}2\,x + 10$$

denklemi bulunur.

- Perakende fiyatı 35₺ olan bir ilacı $y = 35$ olarak denklemde yerine yazarsak

Örnek

- 0^0 C (Santigrad) 32^0 F(Fahrenheit)'a ve 100^0 C, 212^0 F'a eşit olduğuna göre Derece ve Fahrenheit ile verilen sıcaklıklar arasındaki ilişkiyi lineer denklemle ifade ediniz.

$$35 = 1{,}2\,x + 10 \Rightarrow x = \frac{35 - 10}{1.2} = 20{,}83$$

Fahrenheit ve Santigrat arasındaki lineer ilişki

$F = 1{,}8C + 32$

Çözüm: Fahrenheit ve Santigrat arasındaki lineer ilişkiyi $F = mC + n$ (veya $C = aF + b$) içiminde bulmalıyız. Burada F Fahrenheit'i, C Santigrat'ı göstermektedir. Verileri göz önüne alarak (C, F) sıralı ikilileri verilere göre oluşturulup bu iki noktadan geçen doğru denklemini elde etmeliyiz. Yani, (0,32) ve (100,212) noktalarından geçen doğru denklemi bulunursa istenilen ilişki elde edilmiş olur.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1{,}8$

olup $y - y_1 = m(x - x_1)$ denkleminde y yerine F, x yerine de C alınırsa, (0,32) noktası için

$$F - 32 = 1{,}8(C - 0)$$
$$F = 1{,}8C + 32$$

denklemi elde edilmiş olur.

Örnek

•72^0 F(Fahrenheit)'ın kaç ^{0} C olduğunu bulunuz.

Santigrat ve Fahrenheit arasındaki lineer ilişki

$C = \frac{F - 32}{1{,}8}$

biçimindedir.

Çözüm: Fahrenheit ve Santigrat arasındaki lineer ilişki

$$F = 1{,}8C + 32$$

biçimindedir. Buna göre, bu denklemde $F = 72$ alınırsa,

$$72 = 1{,}8C + 32 \Rightarrow 1{,}8\,C = 72 - 32 \Rightarrow C = \frac{72 - 32}{1{,}8} = \frac{40}{1{,}8} = 22{,}2$$

bulunur

Örnek

•42^0 C (Santigrat)'ın kaç Fahrenheit olduğunu bulunuz?

Çözüm: Santigrat ve Fahrenheit arasındaki lineer ilişki

$$F = 1{,}8C + 32$$

biçimindedir. Buna göre, bu denklemde $C = 42$ alınırsa,

$$F = (1{,}8)42 + 32 \Rightarrow F = 107{,}6$$

bulunur

Termometrelerin hata yapma olasılıkları göz önüne alınarak dereceler arası geçişleri daha basit olarak yaparız. Fahrenheit'ten Santigrat'a geçmek için (F-32)/ 2 = C formülü zihinden kolay hesap yapmamıza yardımcı olur. Yukarıdaki formüllerde 1.8 ile bölündüğüne dikkat ediniz.

Örnek

• 64 Fahrenheit'ın kaç Santigrat olduğunu pratik yoldan bulunuz?

Termometrelerin hata yapma olasılıkları göz önüne alınarak dereceler arası geçişleri daha basit olarak yaparız. Fahrenheit'ten Santigrat'a geçmek için (F-32)/ 2 = C formülü zihinden kolay hesap yapmamıza yardımcı olur.

Çözüm: Fahrenhaeit'in Santigrat karşılığını bulmak için, $C = \frac{F-32}{2}$ formülü kullanılırsa, $C = \frac{64-32}{2} = \frac{32}{2} = 16$ Santigrat elde edilir.

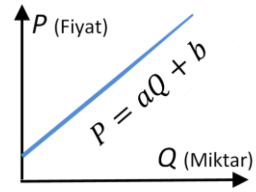
Bireysel Etkinlik

- Su, deniz seviyesinde 100 ^{0} C'de kaynar. 2500 m rakımda olan yerde ise 75^0 C'de kaynar (Başka etkenler göz önüne alınmadığı farzedilmiştir). Buna göre derece, *x* rakımı, *y* dereceyi göstermek üzere, derece ve rakım arasında *y=mx+n* biçiminde lineer bir ilişki bulunuz.
- 48^0 F'ın kaç ^{0} C olduğunu bulunuz.
- Evinizde veya otomobilinizdeki termometrelerden sıcaklıklara bakarak Fahrenheit ve Santigrat arasında pratik metotla çevrim yapınız.

Arz –Talep ve Denge için Doğrusal (Lineer) Model

Bir ürünün fiyatı, serbest piyasadaki talebi ve piyasaya arzı (sunumu) arasında her zaman bir ilişki vardır. Bu ilişki çeşitli matematik modellerle ifade edilebilir. Burada bu ilişkiyi doğrusal (lineer) modelle ifade edeceğiz. Ürün fiyatını değişken olarak kabul edersek arz ve talep miktarlarını fiyata bağlı olarak lineer bir denklemle ifade edebiliriz. Arz ve talep miktarlarının eşit olduğu fiyata *denge fiyatı* denir. Denge fiyatına karşılık gelen arz-talep miktarlarına ise denge miktarları denir. (*denge fiyatı, denge miktarı*) ikilisine denge noktası veya denge durumu adı verilir. Fiyat arttıkça arz artacağından, talep ise azalacağından arz denklemini artan bir doğru ile, talep denklemini de azalan bir doğru ile temsil edilir.

Suyun kaynamaya başladığı sıcaklığa kaynama noktası denir. Kaynama noktası rakım ile doğrusal (lineer) olarak ilişkilidir. Su deniz seviyesinde 100^0 C 'de kaynar. Her 100 metre rakım artımında 10 C kaynama sıcaklığı azalır.



Şekil 6.1

Arzın ve fiyatın negatif olamayacaklarına dikkat ediniz.

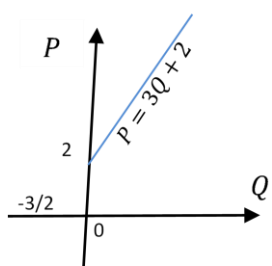
Arz ve talep analizi yapılırken genellikle lineer denklemlerin grafiğinden faydalanılır. Genel bir alışkanlık olarak fiyat P, bağımlı değişkeni gösteren miktar, Q ise bağımsız değişkeni gösteren semboller olarak alınır. Yatay eksen Q, düşey eksen ise P yazılır (Şekil 6.1).

Arz ve talep analizi yapılırken genellikle lineer denklemlerin grafiğinden faydalanılır. Genel bir alışkanlık olarak fiyat P, bağımlı değişkeni gösteren miktar, Q ise bağımsız değişkeni gösteren semboller olarak alınır. Yatay eksen Q, düşey eksen ise P yazılır.

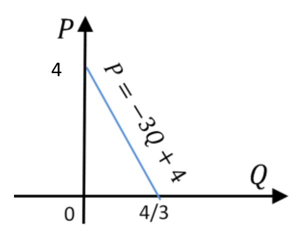
Örnek

•Arz ve talep denklemleri verilen doğruları çiziniz.
•$P = 3Q + 2$ Arz doğrusu $\quad P = -3Q + 4$ Talep doğrusu

Çözüm: Doğru grafikleri aşağıda verilmiştir (Şekil 6.2, Şekil 6.3), inceleyiniz.



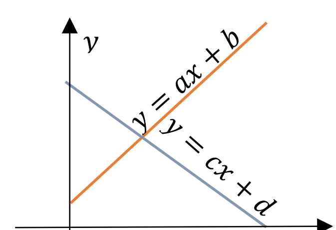
Şekil 6.2



Şekil 6.3

Biz bundan sonra yukarıdaki semboller yerine alışılagelmiş matematiksel sembolleri, fiyat için y, miktar için x olarak kullanacağız.

$y = ax + b,\ a, b > 0$ fiyat-arz doğrusunun denklemi, $y = -cx + d,\ c, d > 0$ fiyat-talep doğrusunun denklemi olarak yazılır. Aşağıdaki grefikte kırmızı ile çizilen arz, mavi ile çizilen talep doğrularıdır (Şekil 6.4).

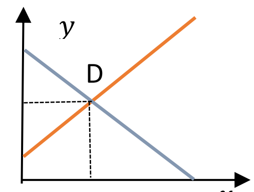


Şekil 6.4

Arz ve talep miktarlarının eşit olduğu noktaya denge noktası demiştik. Bu nokta her iki doğru üzerinde olan D noktasıdır (Şekil 6.5).

Örnek

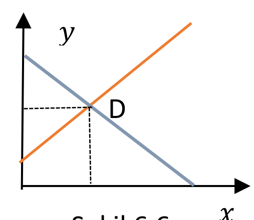
- Bir ürünün arz doğrusu $y = -2x + 3$ ve talep doğrusu $y = 5x - 6$ biçiminde veriliyor. Arz ve talebin eşit olduğu noktayı (denge noktasını) bulunuz.



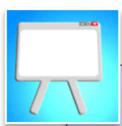
Şekil 6.5

Çözüm: Denge noktasını bulmak için iki denklemdeki y değerleri eşitlenirse

$-2x + 3 = 5x - 6 \Rightarrow 7x = 9 \Rightarrow x = 9/7$ denge fiyatı bulunur. Bulunan x değeri herhangi bir denklemde yerine yazılırsa, $y = 5x - 6 = 5\left(\frac{9}{7}\right) - 6 = 3/7$ (denge miktarı)bulunur. Denge noktası ise D=$(9/7, 3/7)$ biçiminde bulunur (Şekil 6.6).



Şekil 6.6



Örnek

- Fiyat her kutu meyve suyu için 3 ₺ olduğunda arz 500 000 kutu, talep ise 400 000 kutudur. Fiyat her kutu için 2,5 ₺ olduğunda arz 360 000 kutu talep ise 450 000 kutudur. x (1000 kutu)arz'ı, y fiyatı göstermek üzere, $y = ax + b$ biçiminde fiyat-arz denklemini ve $y = cx + d$ fiyat-talep denklemini bulunuz.

Çözüm: x, (1000) kutu olarak arz'ı, y de fiyatı gestermek üzere

$$y = ax + b$$

yazılır. Buna göre fiyat-arz denklemini bulmak için bu denklemi sağlayan (x, y) şeklinde iki farklı nokta bulmalıyız. Sonra ise verilen iki noktadan geçen doğru denklemi bize aradığımızı verecektir. Verilenlere göre (500, 3) ve (360, 2.5) noktaları bu doğru üzerinde bulunurlar. Bu noktalardan geçen doğrunun eğimi

$$m = \frac{3 - 2.5}{500 - 360} = \frac{0.5}{140} = 0,0035$$

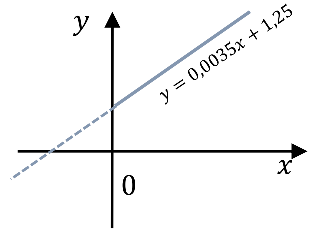
olup aradığımız doğru denklemi, yani fiyat arz denklemi

$$y - 3 = 0,0035(x - 500)$$

$$y - 3 = 0{,}0035x - 1{,}75$$
$$y = 0{,}0035x + 1{,}25$$

biçiminde bulunur.

Benzer olarak, fiyat talep denklemi için işlemler yapılır. Siz tamamlayınız.



Şekil 6.7

Bireysel Etkinlik

- Fiyat her kutu meyve suyu için 3 ₺ olduğunda arz 500 000 kutu, talep ise 400 000 kutudur. Fiyat her kutu için 2,5 ₺ olduğunda arz 360 000 kutu talep ise 450 000 kutudur. Buna göre, *x* (1000 kutu)arz'ı, *y* fiyatı göstermek üzere,
- *y=ax+b* biçiminde fiyat-arz denklemini,
- *y=cx+d* fiyat-talep denklemini ve
- Denge noktasının bulunuz.

Başabaş Analizi

Yeni bir iş planlaması yapılmak istendiğinde kâra geçen minimum satış hacminin bilinmesi önemlidir.

Başabaş noktası, kârın sıfır olduğu nokta veya toplam gelirin toplam maliyete eşit olduğu noktadır.

Bir firmanın bilançosunun zarardan kâra geçtiği noktanın tahmini, *başabaş analizi* olarak ifade edilir. Başabaş noktası, kârın sıfıra eşit olduğu veya toplam gelirin toplam maliyete eşit olduğu nokta olarak belirlenebilir.

Toplam geliri *R* ile toplam maliyeti C ile gösterelim. Toplam gelir ve toplam maliyet üretim miktarına bağlı olarak lineer bir denklemle verilebilir. Kâr ise K = R – C biçiminde, yani toplam gelir ile toplam maliyet farkı olarak tanımlanır.

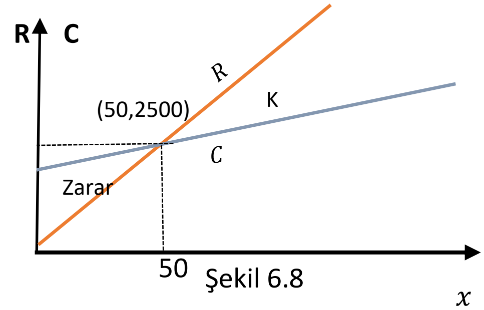
Örnek

- Toplam gelir $R = 50x$, toplam maliyet $C = 20x + 1500$ biçiminde veriliyor. Başabaş noktasını bulunuz.

Çözüm: Başabaş noktası kârın sıfır olduğu nokta veya toplam gelirin toplam maliyete eşit olduğu nokta idi buna göre, $R = C$ eşitliği istenileni verecektir. O hâlde

$$R = 50x = C = 20x + 1500$$
$$50x = 20x + 1500$$
$$30x = 1500$$
$$x = 50$$

ürünün başabaş düzeyi elde edilir. Başabaş noktası ise, $(50, 2500)$ sıralı ikisinin temsil ettiği noktadır.



Şekil 6.8

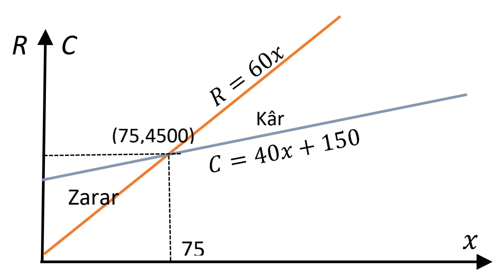
Örnek

•Toplam gelir $R = 60x$, toplam maliyet $C = 40x + 150$ biçiminde verilıyor. Başabaş noktasını bulunuz. Kâr için ne söyleyebilirsiniz.

Çözüm: Başabaş noktası toplam gelirin toplam maliyete eşit olduğu nokta idi buna göre, $R = C$ eşitliği istenileni verecektir. O hâlde

$$R = 60x = C = 40x + 150$$
$$60x = 40x + 150$$
$$20x = 150$$
$$x = 75$$

ürünün başabaş düzeyi elde edilir. Başabaş noktası ise $(75, 4500)$ sıralı ikilisinin temsil ettiği noktadır.



Şekil 6.9

Bireysel Etkinlik

- Bir firma için toplam gelir R = 45x ve toplam maliyet c = 30x + 4500 biçiminde belirlenmiştir.
- Başabaş noktasını bulunuz.
- Firmanın kâra geçmesi için en az kaç ürün satması gerekmektedir?
- Firma kaç ürün satışına kadar zarardadır?

Eşitsizlik Uygulamaları

a ,b ve x reel sayılar olmak üzere $ax+b\leq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$ ve $ax+b>0$ biçimindeki ifadelere doğrusal eşitsizlikler (birinci dereceden eşitsizlikler), a, b, c ve x reel sayılar olmak üzere $ax^2+bx+c\leq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$ ve $ax^2+bx+c>0$ biçimindeki ifadelere de ikinci dereceden eşitsizlikler dendiğini ve özelliklerini geçen bölümden hatırlayacaksınız. Benzer olarak mutlak değerli eşitsizlikler için

$$|x|\leq k \Rightarrow -k\leq x\leq k$$

$$|x|\geq k \Rightarrow x\leq -k \text{ ya da } x\geq k$$

olduklarını biliyoruz.

Bu bölümde eşitsizlikler kullanarak çözülebilen örnekler vereceğiz.

Örnek

- 3x - 5 ≤ 4x + 2 eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 3x-5 &\leq 4x+2 \\ -2-5 &\leq 4x-3x \\ -7 &\leq x \end{aligned}$$

bulunur. Aralık gösterimiyle çözüm kümesi $Ç = \{x\epsilon\mathbb{R}: -7 \leq x\} = [-7, \infty)$ biçiminde de yazılır.

Örnek

- İki oto kiralama firması kiralama bedellerini şöyle belirliyorlar:
  - Firma, günlük 80 TL ve kilometre başı 3,5 ₺,
  - Firma, günlük 85 TL ve kilometre başı 3 ₺
- Buna göre I. firmadan 1 haftalığına araba kiralayan bir kişinin birinci firmaya ödeyeceği paranın ikinci firmaya ödemesi gereken paradan az olması için bu kişinin arabayı en fazla kaç kilometre kullanması gerekir?

Çözüm: Kullanılan kilometreyi x ile gösterelim. Buna göre,

$$7 \cdot (80) + 3{,}5x < 7 \cdot (85) + 3x$$

$$0{,}5x < 35$$

$$x < \frac{35}{0{,}5} = 70$$

bulunur. O hâlde kullanacağı en fazla kilometre 69,9 km olmalıdır.

Örnek

- Bir firma iş makinesi kiralama (bir yıl için) ya da satın alma konusunda bir tercih yapacaktır. Eğer makinayı kiralarsa, kira ücreti olarak aylık 3000 ₺ ve makinenin kullanıldığı her gün için günlük maliyet (yakıt, sürücü ücreti, bakım ücreti vs.) 180 ₺ olacaktır. Eğer satın alınırsa, sabit yıllık maaliyet 20000 ₺ ve makinenin kullanıldığı her gün için bakım maaliyetleri 230 ₺ olacaktır. Firma, en yüksek faydayı elde etme düşüncesiyle, makineyi satın almak yerine kiralarsa, makineyi en az kaç gün kullanmalıdır?

Çözüm: Kiralamanın yıllık maaliyeti ile satın almanın yıllık maaliyetlerini bulup karşılaştırma yapacağız. Makinenin kullanıldığı gün sayısı x olsun. Buna göre, kiralama için, $12 \cdot 3000 + 180x$ ve satın alma için $20000 + 230x$ yıllık maliyetler yazılır. O hâlde

$$12 \cdot 3000 + 180x < 20000 + 230x$$
$$36000 + 180x < 20000 + 230x$$
$$16000 < 50x \Rightarrow 320 < x$$

bulunur. O hâlde en büyük faydayı sağlamak için kazı makinesi 321 gün kullanılmalıdır.

Örnek

• Hareket halinde geçen t saat sonunda, bir otomobilin deposunda bulunan x yakıt miktarı litre olarak $x = 65 - 5t$ bağıntısıyla belirlidir. Depodaki yakıt miktarı 10 litrenin altına düştüğünde otomobilin yakıt alması gerekmektedir. Hareket halinde bulunan otomobilin en erken kaçıncı saat içinde yakıt alması gerekmektedir?

Çözüm:

x yakıt miktarını göstermek üzere yakıtın 10 litrenin altına düşmesi durumunda yakıt alması gerektiği durumu $x < 10$ ile ifade edilir. Buna göre

$$65 - 5t < 10$$
$$65 - 10 < 5t \Rightarrow 55 < 5t \Rightarrow 11 < t$$

elde edilir. Buna göre, t en az 12 olmalıdır. Yani, 12. saat içinde yakıt alması gerekmektedir.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Reel sayı doğrusu üzerinde bir x sayısının başlangıç noktasına olan uzaklığı x'in mutlak değeri olarak adlandırıldığını geçen bölümlerden biliyorsunuz. Burada mutlak değerli eşitsizlikler ile ilgili örnekler verilecektir.

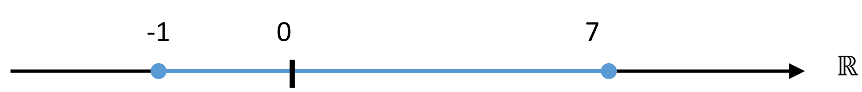
Örnek

• $|x-3| \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Mutlak değerli eşitsizliklerin özelliklerine göre, $|x| \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k$ olduğu göz önüne alınarak, $-4 \leq x - 3 \leq 4$ yazılır. İki eşitsizlik ayrı ayrı düşünülerek

$$-4 \leq x - 3 \leq 4$$
$$-4 + 3 \leq x \leq 4 + 3$$
$$-1 \leq x \leq 7$$

elde edilir. Yani çözüm kümesi $[-1, 7]$ aralığı olarak bulunur. Bu kümeyi sayı doğrusunda gösterirsek



biçiminde çizilir.

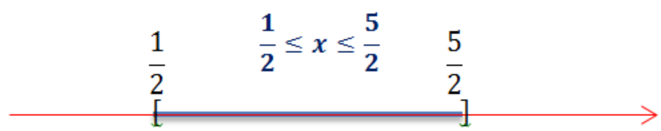
Örnek

• $|3-2x| \leq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Mutlak değerli eşitsizliklerin özelliklerine göre,

$$-2 \leq 3-2x \leq 2$$
$$-2-3 \leq -2x \leq 2-3$$
$$-5 \leq -2x \leq -1$$
$$\frac{5}{2} \geq x \geq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

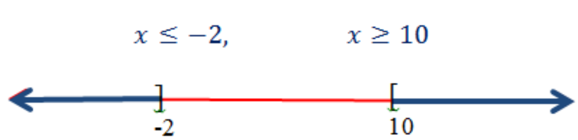
elde edilir. O hâlde çözüm kümesi $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ kapalı aralığı olarak yazılır. Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibidir:



Örnek

• $|x-4| \geq 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Eşitsizlik özelliklerine göre $x-4 \leq -6$ ya da $x-4 \geq 6$ olmalıdır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $x \leq -2$ ya da $x \geq 10$ bulunur. O hâlde çözüm kümesi $(-\infty, -2] \cup [10, \infty)$ biçimindedir. Yine sayı doğrusu üzerinde gösterirsek, biçiminde çizilir.



Özet

- Matematik hayatın bir parçasıdır. Bir çok günlük işlerde matematiksel işlem için farkında olmadan modelleme yaparız. Birinci bölümde Lineer Denklem Uygulamaları ile ilgili uygulamalara yer verilmiş, özel olarak ekonomide çok karşılaşılan arz-talep modeli ve başabaş analizi gibi uygulamalara ait örnekler verilmiştir.
- İkinci bölümde ise zaman zaman karşılaştığımız alternatiflerin hangilerinin daha uygun olacağına karar verebileceğimizi belirleyebilen eşitsizlik uygulamalarına dair örnekler verilmiştir.
- Bir ve iki bilinmeyenli lineer denklemlerin ve lineer eşitsizliklerin çözümleri örnekleri ile incelenmiştir.
- İki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm kümeleri grafikle gösterilmiştir.
- Lineer denklemin özel durumda grafiklerinin nasıl olduğu hakkında bilgiler verilmiştir.
- Eşitsizlikler bölümünde bir bilinmeyenli birinci ve ikinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümelerinin nasıl bulundukları tablolar oluşturularak örnekleriyle açıklanmıştır.
- Ayrıca, iki bilinmeyenli birinci dereceden eşitsizlikler incelenip çözüm kümeleri bulunmuştur.
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler verilerek çözüm kümelerinin nasıl bulundukları anlatılmıştır.
- Mutlak değerli eşitsizlikler tanıtılarak örnekler verilmiştir.
- Ünitenin amacına uygun olarak Değerlendirme Testi ve Deneme Testi verilmiştir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. 4 yanlışın 1 doğru soruyu götürdüğü 52 soruluk bir sınavda her sorunun değeri 4 puandır. Tüm soruları cevaplayan bir öğrenci 148 puan aldığına göre kaç soruyu doğru cevaplamıştır?

a) 39
b) 40
c) 41
d) 42
e) 43

2. Üretilen bir ürünün maliyeti x ve satış fiyatı y TL'dir. Bu ürünün satış fiyatının hesaplanması için:

I. $y = 2x - 150$
II. $y = x + 100$

biçiminde iki bağıntı önerilmiştir. Üretilen ürünün tümü satılabildiğine ve satış fiyatının hesaplanmasında I. bağıntıyı kullanmak daha kârlı olduğuna göre, x maliyeti için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $x > 125$
b) $x > 150$
c) $x > 175$
d) $x > 200$
e) $x > 250$

3. İki şehir arasında gidiş geliş iki farklı yoldan yapılmaktadır. 1. Yol $5x$km 2. Yol ise $x + 20$ km'dir. İkinci yol daha kısa olduğuna göre x için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $1 > x$
b) $4 < x < 5$
c) $2 < x < 3$
d) $1 < x < 2$
e) $x > 5$

4. 48^0 F (Fahrenheit) kaç ^{0} C'dir?

a) 8
b) 8.8
c) 9
d) 9.8
e) 10

5. 25^0 C kaç ^{0} F’dır.

a) 75
b) 76
c) 77
d) 78
e) 79

6. Toplam gelir $R = 50x$, toplam maliyet $C = 10x + 1600$ biçiminde veriliyor. Ürünün başabaş düzeyini yan, x ‘i bulunuz.

a) 10
b) 20
c) 30
d) 40
e) 50

7. Toplam gelir $R = 50x$, toplam maliyet $C = 10x + 2500$ biçiminde veriliyor. Kaçıncı üründen sonra kâra geçilir?

a) 39
b) 40
c) 41
d) 45
e) 50

8. 2500 m rakımda olan bir yerde su kaç ^{0} C derecede kaynar?

a) 75
b) 76
c) 77
d) 78
e) 79

9. Suyun 80^0 C’de kaynadığı bir yerin rakımı kaç metredir?

a) 2000
b) 2100
c) 2200
d) 2300
e) 2400

10. Bir toplulukta sigara içen bayan yüzdesi 2000 yılında %21 iken 2006 yılında %18'e düşmüştür. 2000 yılından sonraki x inci yılda sigara içen bayan yüzdesi y olsun. x ve y arasında lineer bağıntı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = -0.5x + 21$,
b) $y = -0.5x + 18$,
c) $y = 0.5x - 21$
d) $y = 0.5x - 18$
e) $y = -21x + 18$

Cevap Anahtarı

1.b, 2.e, 3.e, 4.b, 5. c, 6.d, 7.c, 8.a, 9.a, 10.a

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Barnet M.A., Ziegler M.R., Byleen K.E., Calculus. Pearson Yayınları.

[2] Brown R.G., (1997). *Advanced Mathematics.* Boston: McDougal Littell Inc.

[3] Dowling E.T., (1993). *İşletme ve İktisat için Matematiksel Yöntemler*(Çeviri). Scham's Outline Series, New York: McGraw-Hill

[4] Glass C.J., (1997*). İktisatta Matematiksel Yöntemlere Giriş.* (Çeviri). İstanbul: Der Yayınları

[5] Haeussler E.F. (2010). *Temel Matematiksel Analiz.* (Çeviri). New Jersey: Prentice Hall.

[6] Kobu B., (1997). *İşletme Matematiği*. İstanbul: Avcıol Basın Yayın.

[7] Özer O., (2009). *Genel Matematik*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

FONKSİYONLAR

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Fonksiyon kavramını öğrenebilecek,
  - Fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulabilecek,
  - Fonksiyonun grafiğini çizebilecek,
  - Fonksiyonların özelliklerini öğrenebilecek,
  - Fonksiyonlarla ilgili işlemleri yapabilecek,
  - Bazı standart fonksiyonları öğreneceksiniz.

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Ömer TARAKCI

ÜNİTE

7

Fonksiyon Kavramı

Fonksiyonun tanımı ve ifadesi

Tanım, değer ve görüntü kümeleri

Fonksiyonun Grafiği

$f:[a,b]\longrightarrow[c,d]\,, \qquad y=f(x)$

Fonksiyonlarda İşlemler

Fonksiyonların Toplamı

Fonksiyonların Bileşkesi

Fonksiyonların Özellikleri

Bire-bir Fonksiyon

Örten Fonksiyon

Fonksiyonun Tersi

Bazı Standart Fonksiyonlar

Birim Fonksiyon

Polinom Fonksiyon

Rasyonel Fonksiyon

Mutlak Değer Fonksiyonu

GİRİŞ

Matematik, fizik, kimya, mühendislik bilimleri, teknoloji, ekonomi, diğer bilim dallarında ve günlük hayatımızda çeşitli problemleri incelerken uzunluk, alan, hacim, ağırlık, zaman, basınç, hız, arz, talep gibi çeşitli büyüklüklerle karşılaşırız. Bazen bu büyüklüklerden biri değişirken bir diğeri de bu değişimden etkilenip belli bir kurala bağlı kalarak değişir.

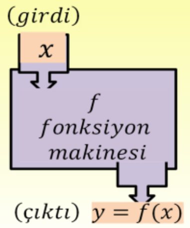
Örneğin bir kenarı a olarak verilen bir küpün hacmi $V = a^3$ olarak hesaplanır. a (kenar uzunluğu) değiştikçe V (küpün hacmi) de a 'ya bağlı olarak değişir.

Bunun gibi bir olay veya büyüklük bir ya da birden çok değişkene bağlı olabilir. Örneğin bir dairenin alanı yarıçapına, alınan yol hıza ve zamana, suyun kaynama sıcaklığı deniz seviyesinden yüksekliğe bağlıdır. Bu örneklerde bağımsız değişken veya değişkenler ile bunlara belli bir kurala göre bağlı olan bağımlı değişkenler karşımıza çıkar.

Bağımsız değişkenle buna bağlı olarak değişen değişken arasındaki *fonksiyon* adı verilen özel bir bağıntıyı ele alıp özelliklerini inceleyeceğiz.

FONKSİYON KAVRAMI

Bir fonksiyonu bir makineye de benzetebiliriz.



Tanım 7.1: A ve B boş olmayan iki küme olsun. A nın her bir x elemanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına dönüştüren kurala A kümesinden B kümesine bir *fonksiyon* denir. A 'dan B 'ye bir fonksiyon $A \xrightarrow{f} B$ veya

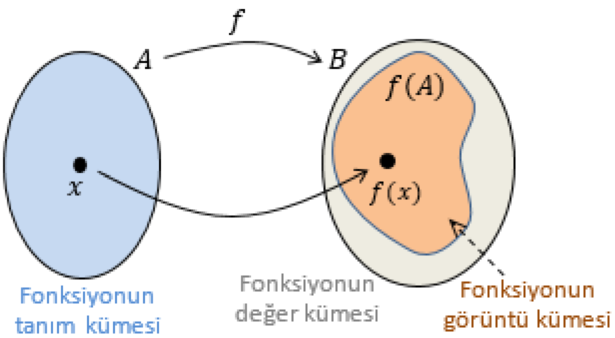
$f: A \longrightarrow B$ şeklinde gösterilir. Burada A ya f fonksiyonunun *tanım kümesi*, B 'ye de *değer kümesi* denir.

A 'dan B 'ye bir fonksiyon A 'nın x elemanını B 'nin y elemanına götürüyorsa

$$f: A \longrightarrow B, \quad y = f(x)$$

olarak yazılır ve y ye f fonksiyonu altında *x 'in görüntüsü* denir.

A nın bütün elemanlarının f fonksiyonu altındaki görüntülerinin kümesi $f(A)$ ile gösterilir ve A 'nın B 'deki *görüntü kümesi* olarak adlandırılır. Fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlar *bağımsız değişken*ler olarak ele alınır. Görüntü kümesindeki elemanlar ise fonksiyonun kuralı ile tanım kümesinin elemanlarından elde edilen *bağımlı değişken*lerdir.



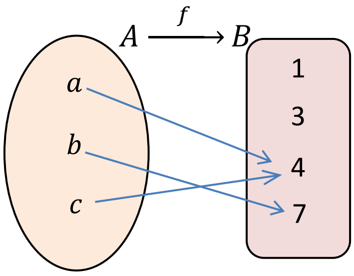
Fonksiyonlarla ilgili şu iki duruma dikkat etmeliyiz:

1. Fonksiyonun tanım kümesindeki her elemanın mutlaka görüntüsü olacak. Yani tanım kümesinde görüntüsü olmayan eleman kalmayacak.
2. Tanım kümesindeki bir elemanın birden fazla görüntüsü olamaz. Ancak görüntü kümesindeki bir eleman, tanım kümesindeki birden fazla elemanın görüntüsü olabilir.

$f: A \longrightarrow B,\ y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Bir $x_0 \in A$ için $f(x_0) \in B$ değerine fonksiyonun x_0 daki özel değeri veya f fonksiyonu altında x_0 *'ın görüntüsü* denir.

Örnek

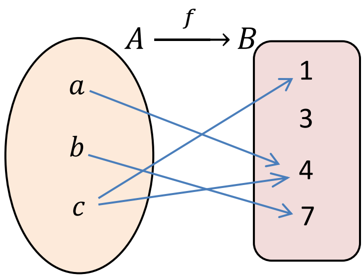
•Aşağıda a, b ve c seçeneklerinde A={a,b,c} ve B={1,2,3,4} kümelerinin elemanları arasında eşleştirmeler verilmiştir. Bu eşleştirmelerden hangilerinin fonksiyon olduğunu inceleyelim:



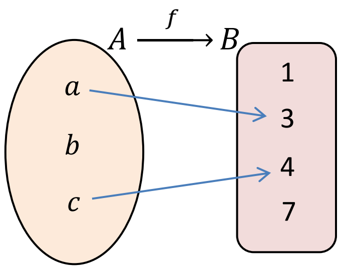
Yandaki $f: A \to B$ kuralı bir fonksiyondur. Çünkü $A = \{a, b, c\}$ kümesinin her elemanının B 'de bir görüntüsü var ve A 'nın herbir elemanı B 'de bir tek elemana gitmektedir.

$f(a) = 4, \quad f(b) = 7, \quad f(c) = 4.$

f fonksiyonunun değer kümesi $B = \{1,3,4,7\}$ ve görüntü kümesi $f(A) = \{4,7\}$ kümesidir.



A 'nın c elemanı B 'de iki elemana gittiğinden f bir fonksiyon değildir.



Tanım kümesindeki bir elemanın (b 'nin) görüntüsü olmadığından f bir fonksiyon değildir.

Bir f fonksiyonunun tanım kümesi ve değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin birer alt kümesi ise f ‘ye reel değişkenli ve reel değerli fonksiyon denir. Daha çok bu tür fonksiyonlarla ilgileneceğiz.

Örnek

•$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y = x^2 - 4$ fonksiyonu verilsin.
•$f(-3)$ ve $f(5)$ değerlerini bulunuz.
•Tanım kümesinin hangi elemanının görüntüsü 12 dir?

Çözüm:

a) $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

$f(5) = 5^2 - 4 = 25 - 4 = 21$

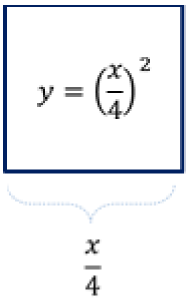
b) $f(x) = 12 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x_1 = -4, \quad ve \quad x_2 = 4$

Örnek

•Karenin alanı, çevresinin bir fonksiyonu mudur?



Çözüm: Çevre uzunluğu x birim olan bir karenin bir kenarının uzunluğu $\frac{x}{4}$ birimdir. Bu karenin alanı y ise $y = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$ olur. Her bir x değerine bir tek y karşılık geldiğinden karenin alanı çevresinin bir fonksiyonudur. Çevre uzunluğu pozitif reel sayı olduğundan, bu fonksiyon;

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y = f(x) = \frac{x^2}{16}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 7.2: (Fonksiyonların Eşitliği) f ve g, A ‘dan B ‘ye tanımlı fonksiyonlar ve her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ile g fonksiyonlarına *eşit fonksiyonlar* denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

Örnek

•$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 9$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-3)(x+3)$ fonksiyonları eşittir.
•Çünkü her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ dir.

Fonksiyonun Tanım ve Görüntü Kümelerinin Bulunması

Bazen sadece fonksiyonun kuralı verilip tanım ve görüntü kümelerinin bulunması istenebilir.

Reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon f olsun. $f(x)$ değerlerini reel sayı yapan bütün x sayılarının oluşturduğu $A \subset \mathbb{R}$ kümesine f ‘nin *tanım kümesi* denir. f ‘nin tanım kümesinin bütün elemanlarının f altındaki görüntülerinin kümesine de f ‘nin *görüntü kümesi* denir.

Örnek

•Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini inceleyiniz.

Fonksiyon		Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
a)	$\mathrm{y} = \mathrm{x} + 3$	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
b)	$\mathrm{y} = x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
c)	$\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{x} - 1}$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$
d)	$\mathrm{y} = \dfrac{1}{x - 1}$	$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
e)	$\mathrm{y} = \sqrt{3 - \mathrm{x}}$	$(-\infty, 3]$	$[0, \infty)$
f)	$\mathrm{y} = \sqrt{4 - \mathrm{x}^2}$	$[-2,2]$	$[0,2]$

a) Her $x \in \mathbb{R}$ için $y = x + 3 \in \mathbb{R}$ olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ ‘dir.
$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3$ olur. Yani $\forall\, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık gelen tanım kümesinden bir eleman bulunduğu için görüntü kümesi $\mathbb{R}$ ‘dir.

b) Her $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ sayısı için $x^2 \in \mathbb{R}$ olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ ‘dir. Her reel sayının karesi 0 veya pozitif reel sayı olduğundan görüntü kümesi $[0, \infty)$ olur.

c) Negatif sayıların karekökü olmadığından $x - 1 \geq 0$ şartına uyan x ‘ler fonksiyonu tanımlı yapar. Buna göre tanım kümesi $[1, \infty)$ olur.
$x \geq 1 \Longrightarrow x - 1 \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{x - 1} \geq 0$. Yani görüntü kümesi $[0, \infty)$ olur.

d) $\mathrm{y} = \frac{1}{x-1}$ formülünde $x = 1$ hariç her $x \in \mathbb{R}$ için, reel bir y değeri elde edilir. Hiçbir sayı sıfıra bölünemez. Bu nedenle tanım kümesi $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ olur. x değişkeni $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesinde değiştikçe, y değeri olarak 0 hariç bütün reel sayılar elde edilir. Buna göre görüntü kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ olur.

e) Negatif sayıların karekökü yoktur.

$x \in (-\infty, 3]$ için $3 - x \geq 0$ olduğundan $y = \sqrt{3 - x}$ 'in tanım kümesi $(-\infty, 3]$ olur. $x \in (-\infty, 3]$ için y değerleri $[0, \infty)$ aralığında olup görüntü kümesi $[0, \infty)$ bulunur.

f) $x \in [-2,2]$ için $4 - x^2 \geq 0$ olup $y = \sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-2,2]$ olur. $x \in [-2,2]$ için y değerleri $[0,2]$ aralığında kaldığından görüntü kümesi $[0,2]$ 'dir.

Fonksiyon ifade edilirken $f: A \rightarrow B, y = f(x)$ şeklinde verilir. Burada A tanım kümesi, B değer kümesidir. Görüntü kümesi ise B 'nin alt kümesidir. Bazen konu gereği tanım kümesi kısıtlanabilir. Örneğin; $f(x) = \sqrt{3 - x}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(-\infty, 3]$ aralığıdır. Ancak tanım kümesini $(-4, 2]$ aralığına kısıtlayıp fonksiyonu, $f: (-4, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3 - x}$ olarak ele alıp üzerine çalışabiliriz.

Fonksiyonların Grafikleri

Tanım 7.3: $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) noktalar kümesine $y = f(x)$ *fonksiyonunun grafiği* denir.

$y = f(x)$ fonksiyonu için $(x, y) = \big(x, f(x)\big)$ noktalarının kartezyen düzlemde yerleştirilmesiyle fonksiyonun grafiği çizilmiş olur. Grafik sayesinde bağımsız değişken x değiştikçe, y 'nin x den nasıl etkilendiği konusunda daha rahat fikir sahibi oluruz.

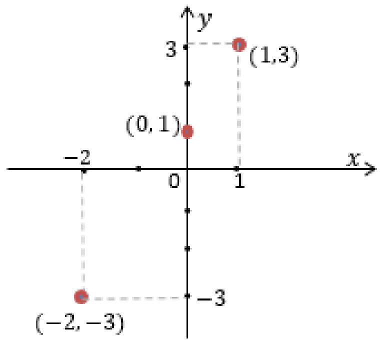
Fonksiyonun grafiği çizilirken;

- Varsa eksenleri kestiği noktalardan yararlanılabilir.
- x 'in bazı değerlerine karşılık y değerlerini hesaplanıp bu (x, y) noktalarından yararlanılabilir.

Konular ilerledikçe fonksiyonun durumuna göre yeni yöntemler verilecektir (13. Ünitede fonksiyonun grafiği ayrıntılı ele alınacaktır).

Örnek

- Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini inceleyiniz.
- **a)** $A = \{-2, 0, 1\}$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = 2x + 1$
- **b)** $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$
- **c)** $f: [-1,2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$
- **d)** $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
- **e)** $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$
- **f)** $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$



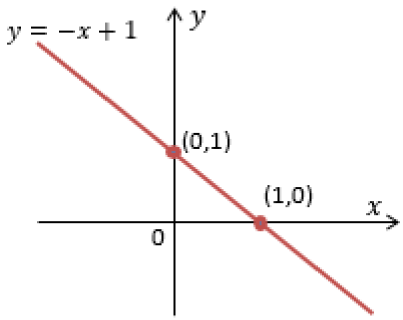
a)

$A = \{-2, 0, 1\},\ f: A \longrightarrow \mathbb{R}, y = 2x + 1$

Tanım kümesine bakılırsa x sadece -2, 0 ve 1 değerlerini alabiliyor. Fonksiyon bu değerleri 2 katının 1 fazlasına dönüştürüyor.

$x = -2 \Longrightarrow y = -3, \quad x = 0 \Longrightarrow y = 1,$
$x = 1 \Longrightarrow y = 3$

Buna göre $(-2, -3)$, $(0, 1)$ ve $(1, 3)$ noktalarının koordinat düzleminde yerleştirilmesiyle fonksiyonun grafiği çizilir.

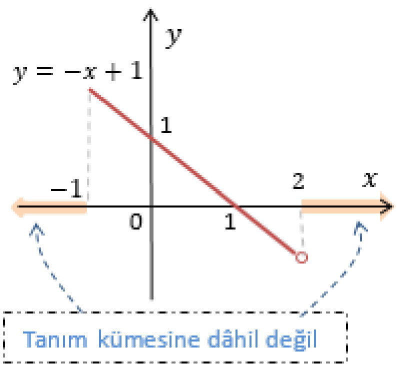


b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x + 1$

$f(x) = -x + 1$ fonksiyonu birinci dereceden bir polinom fonksiyondur. Grafiği *doğru*dur. Doğrunun grafiği çizilirken geçtiği herhangi iki nokta bulunur. Bu iki noktadan geçen doğru çizilir.

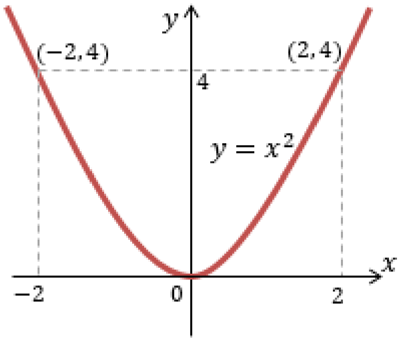
$x = 0$ ise $y = 1$ bulunur. y eksenini $(0,1)$ noktasında keser.
$y = 0$ ise $x = 1$ bulunur. x eksenini $(1,0)$ noktasında keser.

Grafik çizilirken eksenleri kestiği noktalardan yararlanıldı.



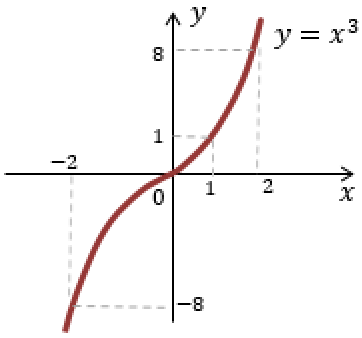
c) $f: [-1,2) \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(x) = -x + 1$

Tanım kümesi $[-1, 2)$ olarak verilmiştir. $y = -x + 1$ fonksiyonunun grafiği sadece bu aralıkta çizilmiştir.



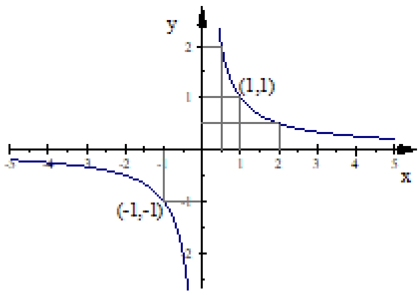
d) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2$

Bu fonksiyonun grafiği paraboldür. Eksenleri orijinde keser. Ayrıca geçtiği iki nokta bulunup, grafik çiziminde yararlanılmıştır.



e) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = x^3$

Bazı x değerlerine karşılık gelen y değerlerini dikkate almak grafiği çizmemize yardımcı olmaktadır.

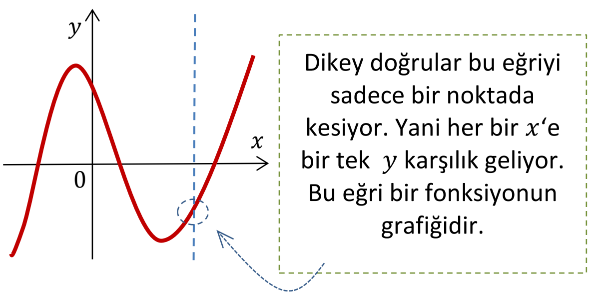


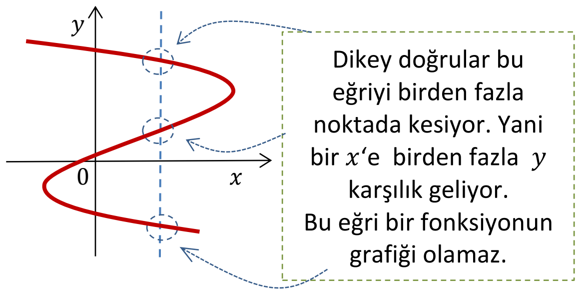
f) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{1}{x}$

Bu fonksiyon $x = 0$ için tanımsızdır. x, sıfıra pozitif değerlerle yaklaşırken $1/x$ büyüyecek, sıfıra negatif değerlerle yaklaşırken $1/x$ sürekli küçülecektir.

Ayrıca, x negatif olarak küçüldükçe ve pozitif olarak büyüdükçe $1/x$ sıfıra yaklaşacaktır.

a şıkkında grafik sadece üç noktadan, diğer şıklarda ise grafikler eğrilerden oluşmaktadır. Ancak her eğri bir fonksiyonun grafiği olmayabilir. Bunu dikey doğru testi ile anlayabiliriz.





Aşağıdaki örnekte olduğu gibi, fonksiyon farklı aralıklarda farklı kurallarla verilebilir. Bu tür fonksiyonlara *parçalı fonksiyon* denir.

Örnek

•$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -1 \ ise \\ x^2-1, & -1 \leq x \leq 2 \ ise \\ 1, & x > 2 \ ise \end{cases}$

parçalı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

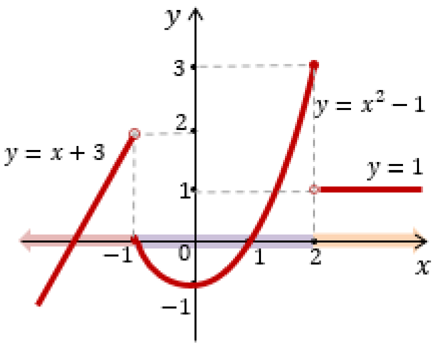
$x < -1$ için $f(x) = \mathrm{x} + 3$

fonksiyonunun,

$-1 \leq x \leq 2$ için $f(x) = x^2 - 1$

fonksiyonunun,

$x > 2$ için $f(x) = 1$ fonksiyonunun grafiğini yandaki gibi çizip örnekteki parçalı fonksiyonun grafiğini çizmiş oluruz.



Aralıkların sınır değerleri için hangi fonksiyonun geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

Fonksiyonlarda İşlemler

Fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı, bölümü ile yeni fonksiyonlar elde edilir.

f ve g reel değerli, reel değişkenli, aynı A kümesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ herhangi bir sayı olmak üzere, her $x \in A$ için,

- f 'nin g ile toplamı, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
- f 'nin g ile çarpımı, $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- f 'nin bir a sabit reel sayısı ile çarpımı, $(a.f)(x) = a.f(x)$
- f 'nin g ile bölümü, $g(x) \neq 0$ olmak üzere, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ olarak tanımlanır.

Böylece verilen f ve g gibi iki fonksiyondan yeni fonksiyonlar elde etmiş oluruz.

f fonksiyonu A_1, g fonksiyonu A_2 üzerinde tanımlı ise $f+g$, $f-g$ ve $f.g$ fonksiyonları $A_1 \cap A_2$ üzerinde tanımlıdır. $f\,/\,g$ de $g(a) \neq 0$ ise $A_1 \cap A_2 - \{a\}$ da tanımlıdır.

Örnek

•$f: [-4,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ ve $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x+3$ fonksiyonlarının toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünü ifade ediniz.

Çözüm: $f+g,\ f-g\ \ ve\ \ f.g$, $[-4,4] \cap \mathbb{R} = [-4,4]$ aralığında tanımlıdır.

$$(f+g): [-4,4] \to \mathbb{R},\ \ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{16-x^2} + x + 3$$

$$(f-g): [-4,4] \to \mathbb{R},\ \ (f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{16-x^2} - (x+3)$$

$$(f.g): [-4,4] \to \mathbb{R},\ \ (f.g)(x) = f(x).g(x) = \left(\sqrt{16-x^2}\right)(x+3)\,,$$

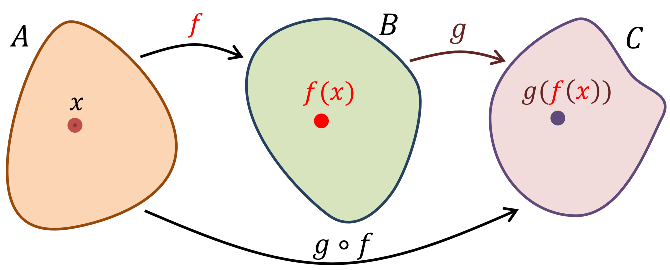
$x = -3$ için $g(-3) = 0$ olduğundan, $\frac{f}{g}$ nin tanım kümesi için $[-4,4]$ aralığından -3 sayısını çıkartırız. Buna göre,

$$\left(\frac{f}{g}\right): [-4,4] \backslash \{-3\} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x+3}$$

şeklinde bulunur.

Fonksiyonların Bileşkesi

$f: A \longrightarrow B$, ve $g: B \longrightarrow C$ fonksiyonları verilsin. g fonksiyonu $f(A)$ kümesinin herbir $f(x)$ elemanını C kümesinin bir $g(f(x))$ elemanına götürür. Bu şekilde, A ‘nın herbir x elemanını C ‘nin bir $z = g(f(x))$ elemanına eşleyen yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona *f ile g fonksiyonlarının bileşkesi* denir ve $g \circ f$ ile gösterilir. Buna göre $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ olur.



Örnek

•$f(x) = 2x - 2$ ve $g(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonları için $g \circ f$ $\ ve\ $ $f \circ g$ bileşke fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *(g fonksiyonunda x gördüğümüz yerde $f(x)$ yazacağız)*

$$= 2(\mathrm{f(x)})^2 + 1$$

$$= 2(2\mathrm{x} - 2)^2 + 1$$

$$= 8x^2 - 16x + 9$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *(f fonksiyonunda x gördüğümüz yerde $g(x)$ yazacağız)*

$$= 2g(x) - 2$$

$$= 2(2\mathrm{x}^2 + 1) - 2$$

$$= 4x^2 + 2$$

elde ederiz. Buradan $g \circ f \neq f \circ g$ olduğunu görebiliriz.

Fonksiyonların Özellikleri

Birebir ve örten fonksiyonlar

$A, B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \longrightarrow B, y = f(x)$ fonksiyonunu alalım.

1) Her $x_1,\ x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ *için* $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa *f 'ye birebir fonksiyon,*
2) Her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ varsa f 'ye *örten fonksiyon, aksi hâlde içine fonksiyon,*
3) f fonksiyonu hem birebir hem de örten fonksiyon ise *f 'ye birebir-örten fonksiyon* denir.

Bir $f: A \longrightarrow B, y = f(x)$ fonksiyonunun birebirliğini her $x_1,\ x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ olduğunu göstererek de kontrol edebiliriz. Birebir fonksiyonda farklı elemanların görüntüleri farklıdır. Örten fonksiyonda $f(A) = B$ 'dir.

Örnek

•$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) = -2x + 3$ fonksiyonu birebir ve örten midir? İnceleyiniz.

Çözüm: f birebirdir: Çünkü;

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow -2x_1 + 3 = -2x_2 + 3$$

$$\Longrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ 'dir.}$$

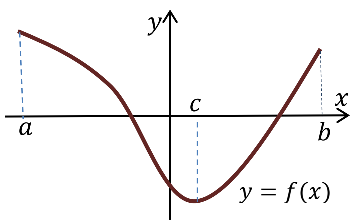
Yani farklı elemanların görüntüleri farklı olduğundan bu fonksiyon birebirdir.

f örtendir: Çünkü; her $y \in \mathbb{R}$ değerine dönüşen $x \in \mathbb{R}$ vardır ve bu

$x = \frac{y-3}{-2}$ ‘dir. Yani değer kümesinde açıkta eleman kalmamaktadır.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar: $A, B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \longrightarrow B, y = f(x)$ fonksiyonunu alalım.

1) Her $x_1,\ x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa f ‘ye azalmayan fonksiyon, $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa *f ‘ye artan fonksiyon* denir.
2) Her $x_1,\ x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa f ‘ye artmayan fonksiyon, $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa *f ‘ye azalan fonksiyon* denir.
3) Bu şartlardan birini sağlayan fonksiyona *monoton fonksiyon* denir.



Yani, tanım kümesindeki belli bir aralıkta x büyüdükçe y de büyüyorsa fonksiyon artan, x büyürken y küçülüyorsa fonksiyon azalandır.

Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu (a, c) aralığında azalan, (c, b) aralığında artandır.

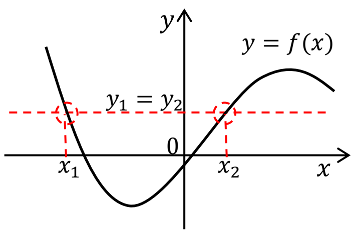
Tek ve Çift Fonksiyonlar: $A, B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \longrightarrow B, y = f(x)$ fonksiyonunu alalım.

1) Her $x \in A$ $için$ $-x \in A$ ve $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f ‘ye çift fonksiyon,
2) Her $x \in A$ $için$ $-x \in A$ ve $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f ‘ye tek fonksiyon denir.

Örnek

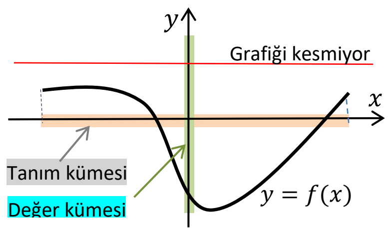
- $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonu çift fonksiyondur. Çünkü;
  $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$.
- $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonu tek fonksiyondur. Çünkü;
  $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$.

Bir fonksiyonun geometrik modellemesi olan grafiğine bakarak fonksiyon hakkında bir çok fikir edinebiliriz. Örneğin $f: A \longrightarrow B,\ y = f(x)$ fonksiyonu için,



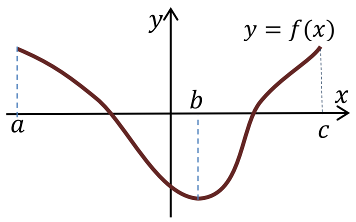
Birebir olmayan fonksiyon

- Her $y \in B$ noktasından x-eksenine paralel çizilen doğru fonksiyonun grafiğini en fazla bir noktada kesiyorsa fonksiyon birebirdir, aksi hâlde birebir değildir.



Örten olmayan fonksiyon

- Her $y \in B$ noktasından x-eksenine paralel çizilen doğru fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kesiyorsa fonksiyon örtendir.

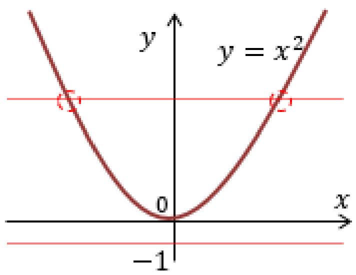


Grafiği verilen fonksiyon (a, b) aralığında azalan, (b, c) aralığında artandır.

- $f: [a, b] \longrightarrow B,\ y = f(x)$ fonksiyonun grafiğini, $(a, f(a))$ noktasından başlayıp, sağa doğru takip edelim. Grafiğin aşağı doğru ilerlediği aralıkta fonksiyon azalan, yukarı doğru ilerlediği aralıkta fonksiyon artandır.
- Tek fonksiyonların grafiği orijine göre, çift fonksiyonların grafiği ise y eksenine göre simetriktir

Örnek

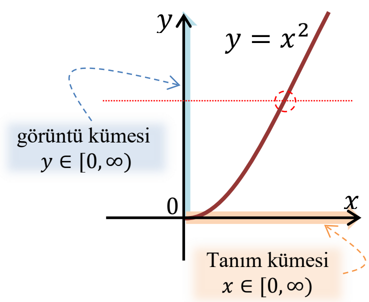
•$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonunun birebir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.



Çözüm: Farklı elemanların görüntüleri aynı olduğundan birebir değildir. Örneğin, $-2 \neq 2$, ancak $f(-2) = f(2) = 4$ ‘tür. (x-eksenine paralel bazı doğrular grafiği birden fazla noktada kesiyor.)

Her $x \in \mathbb{R}$ için $y = x^2 \geq 0$ ‘dır. Yani değer kümesindeki negatif sayılara f ile dönüşebilen $x \in \mathbb{R}$ olmadığından örten değildir. (örneğin, $y - 1$, tanım kümesindeki hiçbir x elemanının görüntüsü değildir.)

Eğer bu fonksiyonun tanım ve değer kümeleri $f: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),\ y = x^2$ olacak şekilde kısıtlanırsa, fonksiyon birebir ve örten olur.



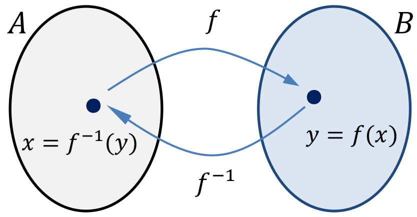
Ayrıca $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında azalan, $(0, \infty)$ aralığında artandır.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ sağlandığından, fonksiyon çift fonksiyondur. (Grafik y-eksenine göre simetriktir)

Bir Fonksiyonun Tersi

$f: A \longrightarrow B,\ \ y = f(x)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. A daki x 'lerin f ile dönüştüğü y 'leri tekrar önceki değerleri olan x 'lere dönüştüren fonksiyona *f fonksiyonunun tersi* denir ve f^{-1} ile gösterilir.

$f: A \longrightarrow B,\ y = f(x)$ ise $f^{-1}: B \longrightarrow A,\ x = f^{-1}(y)$



Örnek

•$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ y = 4x + 1$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun tersini bulunuz.

Çözüm: Önce x in y cinsinden değerini bulalım.

$$f(x) = y \ \Rightarrow 4x + 1 = y \Rightarrow x = \frac{y-1}{4}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ y \xrightarrow{f^{-1}} \frac{y-1}{4} = x = f^{-1}(y)$$

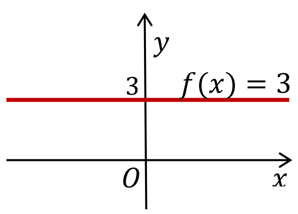
olarak buluruz. Genellikle değişken x ile gösterildiğinden, ters fonksiyonun kuralı yazılırken x yerine y ve y yerine x yazılır. Buna göre,

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$$

olarak ifade ederiz.

f^{-1} fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğine karşılık gelir.

BAZI STANDART FONKSİYONLAR

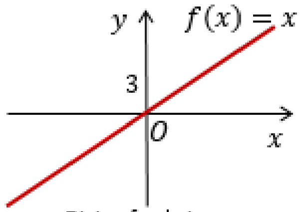


Sabit Fonksiyon: $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}$ bir sabit bir sayı olmak üzere her $x \in A$ için $f(x) = a$ ise f ye *sabit fonksiyon* denir.

Örnek

•$f: A \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3$ bir sabit fonksiyondur.

$f(x) = a$ sabit fonksiyonunun grafiği, y-eksenini $y = a$ da keser ve x-eksenine paraleldir.



Birim fonksiyon

Birim Fonksiyon: $f: A \longrightarrow B$ fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) = x$ ise f fonksiyonuna *birim fonksiyon* veya *özdeşlik fonksiyonu* denir.

Polinom Fonksiyon: $n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1,\ \dots,\ a_n \in \mathbb{R}$ ve $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

fonksiyonuna, *n. dereceden bir polinom fonksiyon* denir. $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları denir.

Örnek

•$f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ üçüncü dereceden,
•$f(x) = 2x + 4x^7$ yedinci dereceden,
•$f(x) = x$ birinci dereceden polinom fonksiyonlardır.
•$f(x) = x^{-1} + 6,\ \ f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonları ise polinom fonksiyonlar değildir.

Rasyonel Fonksiyonlar: f ve g iki polinom fonksiyon olsun. $g(x) \neq 0$ olmak üzere $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonuna *rasyonel fonksiyon* denir. Rasyonel fonksiyonlar paydayı sıfır yapan noktalar hariç diğer noktalarda tanımlıdır.

Örnek

• $f(x) = \frac{3x^2-4x+3}{x^3-2x^2-x+2}$ rasyonel fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: Paydayı 0 yapan x değerlerini bulup reel sayılar kümesinden çıkaralım.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

$x=-1,\ \ x=1,\ \ x=2$ değerleri için payda 0 olur. Fonksiyonun tanım kümesi

$$A=\mathbb{R}\backslash\{-1,1,2\}$$

olarak bulunur.

Mutlak Değer Fonksiyonu: Bir x reel sayısının mutlak değeri

$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\ \ ise\\ \ \ x, & x\geq 0\ \ ise\end{cases}$ olarak tanımlandığını biliyoruz. Verilen bir $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu da $|f|$ ile gösterirsek

$$|f|:A\longrightarrow[0,\infty),\qquad |f|(x)=|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & f(x)<0\ ise\\ \ \ f(x), & f(x)\geq 0\ ise\end{cases}$$

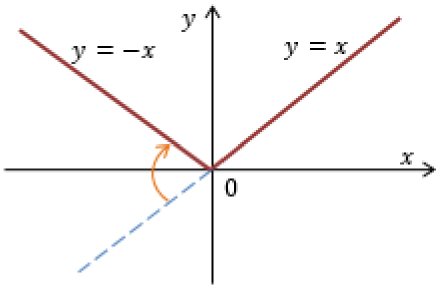
olarak tanımlanır. Her $x\in A$ için $|f(x)|\geq 0$ 'dır.

Örnek

- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4\ \ ise\ \ |f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm a)

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\ \ ise\\ \ \ x, & x\geq 0\ \ ise\end{cases}$$



Bu fonksiyonun grafiği çizilirken,
$x<0$ için $f(x)=-x$ fonksiyonunun,

$x\geq 0$ için $f(x)=x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

Bir fonksiyonun mutlak değerinin grafiği çizilirken, önce fonksiyonun grafiği çizilir, bu grafikte x-ekseninin altında kalan parçasının x-eksenine göre simetriği alınır.

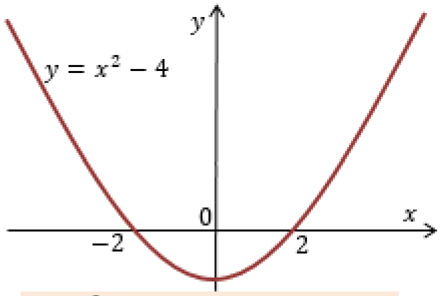
Çözüm b) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4\ \ ise\ \ |f(x)|$ fonksiyonunun işaret tablosu

x	$-\infty$		-2		2		∞
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2-4\rvert$		x^2-4	0	$-x^2+4$	0	x^2-4	

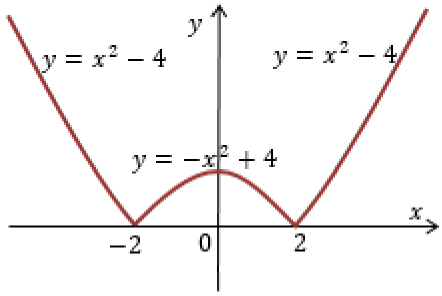
olur. Bu tabloya göre $y=x^2-4$ fonksiyonunun mutlak değeri;

$$|f(x)|=|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4, & x\leq -2\ \ ise\\ -x^2+4, & -2<x<2\ \ ise\\ x^2-4, & x\geq 2\ \ ise\end{cases}$$

şeklinde yazılır. Buna göre $f(x)=x^2-4$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun mutlak değeri olan fonksiyonun grafikleri aşağıdadır. Karşılaştırınız.



$y = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği



$y = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun grafiği

Üstel Fonksiyonlar: a pozitif bir reel sayı ve $a \neq 1$ olmak üzere

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna *üstel fonksiyon,* a ya da üstel fonksiyonun *tabanı* denir. Üstel fonksiyonların tanım kümeleri $(-\infty, \infty)$ ve değer kümeleri $(0, \infty)$ dur.

Logaritmik Fonksiyonlar: $f: \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, $f(x) = a^x$

üstel fonksiyonunun ters fonksiyonuna *logaritma fonksiyonu* denir ve

$f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = log_a x$ olarak ifade edilir. Yani,

$$x = a^y \Leftrightarrow y = log_a x$$

dir.

Üstel ve logaritmik fonksiyonlar Ünite 9'da ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Ödev

- $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonu için aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $f(6) = ?$ **b)** $f(x+2) = ?$ **c)** $f(x+h) - f(x)$

- $f(x) = -x^2 + 2$ fonksiyonu için;

a) $f(x) = -7 \ ise \ x = ?$ **b)** $f(1-x) = -7 \ ise \ x = ?$

- Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{3x - x^2}$ **e)** $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

- Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = 2x - 3$ **b)** $f(x) = -x - 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < -1 \ ise \\ x - 2, & x \geq -1 \ ise \end{cases}$ **d)** $f(x) = x^2 - 2$

- Aşağıdaki fonksiyonların birebir ve örten olup olmadıklarını araştırınız.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 4,$ **b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$

d) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$

e) $f: [0, \infty) \rightarrow [-1, \infty),\ x^2 - 1$

- $f(x) = 2x^2 - 4$ ve $g(x) = x - 3$ fonksiyonları veriliyor.

a) Bu fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

b) $f \circ g = ?$ **b)** $g \circ f = ?$

c) $y = |f(x)|$ ve $y = |g(x)|$ fonksiyonlarını parçalı fonksiyon olarak ifade ediniz ve grafiklerini çiziniz.

Özet

- A kümesinden B kümesine tanımlı bir f fonksiyonu, A' nın x elemanlarını belli bir kurala göre B 'nin y elemanlarına dönüştürür ve $f: A \longrightarrow B, y = f(x)$ şeklinde gösterilir. A 'nın elemanlarını B nin elemanlarına dönüştüren her kural fonksiyon değildir. Ancak ve ancak
  - A 'da f ile B 'nin elemanlarına dönüşmeyen eleman kalmaz,
  - A 'daki her bir eleman B 'de birden fazla elemana dönüşmez ise f kuralı bir fonksiyondur.
- $y = f(x)$ fonksiyonunda, y reel sayı olacak şekildeki x reel sayılarının kümesi f fonksiyonunun tanım kümesini oluşturur. Tanım kümesindeki x elemanlarına karşılık $f(x)$ elemanlarının kümesi de fonksiyonun görüntü kümesidir.
- x, $f(x)$ 'in tanım kümesinde olmak üzere tüm $(x, f(x))$ noktalarının kartezyen düzlemde yerleştirilmesiyle oluşan şekil fonksiyonun grafiğini oluşturur. Grafik fonksiyonun geometrik modellemesidir ve fonksiyonun özelliklerini incelerken büyük yardımcımızdır.
- Düşey bir doğru bir fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kesmez.
- Yatay bir doğru, birebir olan bir fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kesemez.
- Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için birebir ve örten olması gerekir. x girdisini y çıktısına dönüştüren bir fonksiyonun tersi, y çıktısını tekrar x girdisine dönüştüren fonksiyondur.
- Sabit fonksiyon, polinom fonksiyon, rasyonel fonksiyon, mutlak değer fonksiyonu, üstel ve logaritmik fonksiyon gibi fonksiyonları bazı standart fonksiyon tipleri olarak sayabiliriz.

DEĞERLENDİRME SORULARI

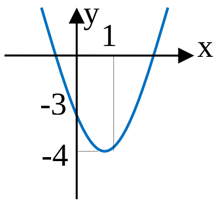
1) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-x-6}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\{2,3\}$
   b) $(-2,3)$
   c) $\mathbb{R}\backslash\{-2,3\}$
   d) $(-\infty,-2) \cup (3,\infty)$
   e) $\{3,5,-6\}$

2) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $(\infty, 2)$
   b) $[2,4]$
   c) (2,4)
   d) (4,∞)
   e) $(-\infty, \infty)$

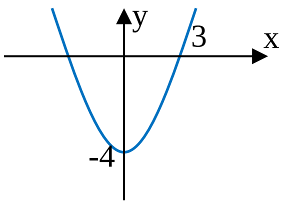
3) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi birebirdir?
   a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
   b) $f: (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
   c) $f: (-4,-1) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
   d) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = |x|$
   e) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2+1}$

4) $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

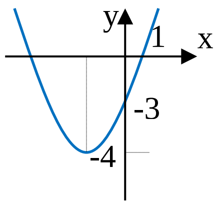
a)



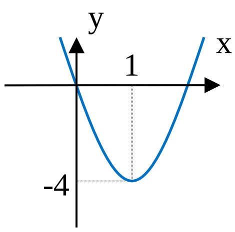
b)



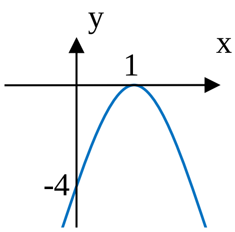
c)



d)



e)



5) $f(x) = x + 1,\ \ g(x) = x^2 - 1$ ise $(g \circ f)(2)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3
b) 4
c) 2
d) 8
e) 0

6) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 8$ ise f^{-1}aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \sqrt[3]{x} - 8$

b) $y = (x - 8)^3$

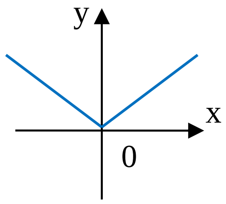
c) $y = x^3 - 8$

d) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+8}$

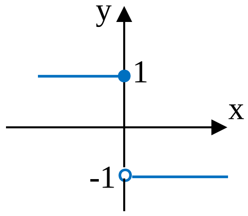
e) $y = \sqrt[8]{x} + 3$

7) $f(x) = |x - 1|$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

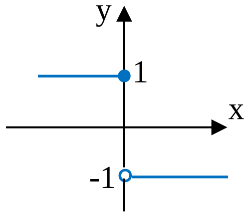
a)



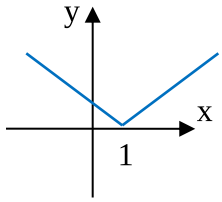
b)



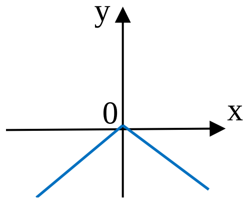
c)



d)



e)



8) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi örtendir?

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

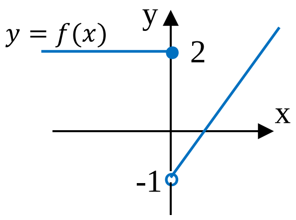
b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

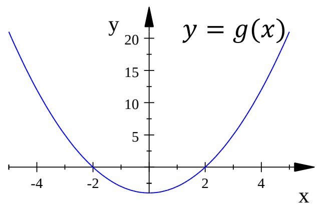
c) $f\colon (-4,-1) \longrightarrow (1{,}17),\ f(x) = x^2$

d) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = |x|$

e) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$

9)





Şekillerdeki $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafiklerine göre $(g \circ f)(-2)$ değeri nedir?

a) 2

b) -1

c) 0

d) -3

e) -2

10) $f(x) = 3x + 4$ fonksiyonunun ters fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $g(x) = \frac{1}{3}x - 4$

b) $g(x) = \frac{1}{3x-4}$

c) $g(x) = \frac{4}{3x}$

d) $g(x) = x - \frac{4}{3}$

e) $g(x) = \frac{x-4}{3}$

Cevap Anahtarı

1.c, 2.b, 3.c, 4.a, 5.d, 6.b, 7.d, 8.b, 9.c, 10.e

YARARLANILAN KAYNAKLAR

Balcı, M. (1999). Matematik Analiz (1. Cilt). Balcı Yayınları. ISBN: 975-6683-02-03. Ankara.

George B. Thomas, Jr., (2010). Thomas Calculus 1. Çev. Korkmaz R., Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., ISBN: 978-605-377-213-2. İstanbul.

Halilov, H. ve Hacısalihoğlu, H. H., (2006). Meslek Yüksek Okulları ve Mühendislik Fakülteleri İçin Matematik. Ertem Matbaa. ISBN: 975-8744-07-0. Ankara.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M, (2009). Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-975-8151-57-8. Erzurum.

Sağel, M. K. ve Aktaş M., (2010), Genel Matematik 1. Pegem Akademi. ISBN: 978-605-364-062-2. Ankara.

Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.,(2009) Temel Matematiksel Analiz. Çev. Demir S., Uzun Ö., Balce A. O., Çağlar A. Akademi Yayıncılık, ISBN:987-975-6885-21-5. Ankara.

Cirrito F. (Editör), Bukle N., Dunbar I., (2009). Mathematics Higer Level. IBID Press. ISBN: 1 876659 11 4. Australia.

POLİNOM FONKSİYONLAR

İÇİNDEKİLER

- Polinom Fonksiyonlar
- Birinci Dereceden Polinom Fonksiyonlar ve Doğrular
- İkinci Dereceden Polinom Fonksiyonlar ve Parabol
- Üçüncü Dereceden Polinom Fonksiyonlar

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Ömer TARAKCI

HEDEFLER

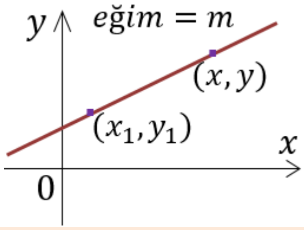
- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Birinci dereceden polinom fonksiyonları tanıyacaksınız.
  - Doğru ve özelliklerini öğreneceksiniz.
  - İkinci dereceden Polinom fonksiyonları öğrenip grafiğini çizebileceksiniz
  - Üçüncü dereceden polinom fonksiyonları öğreneceksiniz.

ÜNİTE

8

Birinci Dereceden Polinom Fonksiyonlar

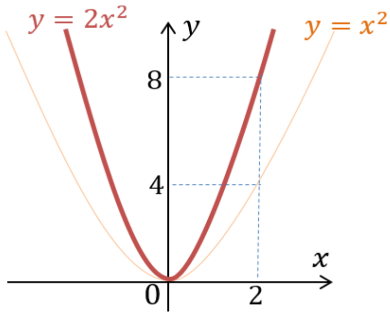
- ***Birinci dereceden polinom fonksiyon ve 'doğru'***
- ***Doğrunun eğimi ve grafiği***
- ***Paralel ve dik doğrular***



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

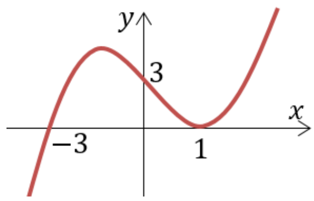
İkinci Dereceden Polinom Fonksiyonlar

- ***İkinci dereceden polinom fonksiyonun denklemi***
- ***İkinci dereceden polinom fonksiyonun grafiği (Parabol)***
- ***Örneklerle parabol çizimleri***



Üçüncü Dereceden Polinom Fonksiyonlar

- ***Üçüncü dereceden polinom fonksiyonların grafikleri***



$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$$
$$= (x-1)^2(x+3)$$

GİRİŞ

En çok karşılaştığımız standart fonksiyonlardan biri polinom fonksiyonlardır.

a sabit bir sayı olmak üzere, $f(x) = a$ olarak verilen sabit fonksiyon sıfırıncı dereceden bir polinom fonksiyon alarak da ele alınır. Bu fonksiyonun grafiği x −eksenini a da keser ve x −eksenine paralel *doğru*dur.

$f(x) = ax + b,\ (a\ ve\ b\ sabit)$, fonksiyonu birinci dereceden polinom fonksiyondur ve grafiği *doğru*dur. Bu fonksiyona doğrusal ya da lineer fonksiyon da denir.

İkinci dereceden polinom fonksiyon $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a, b\ ve\ c\ sabit)$, şeklindedir. Bu fonksiyonun grafiği paraboldür.

Bu bölümde polinom fonksiyonlar tanıtılıp özellikle birinci ve ikinci dereceden polinom fonksiyonlar ayrıntılı ele alınacaktır. Üçüncü dereceden polinom fonksiyonlardan bazılarının grafiklerinin çizimi için pratik bilgiler verilecek, daha yükdek dereceden polinom fonksiyonların grafiklerinin çizimi sonraki bölümlerde ele alınacaktır.

POLİNOM FONKSİYONLAR

TANIM: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit reel sayılar ve $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^2 + a_0$$

fonksiyonuna n yinci dereceden bir *polinom fonksiyon* denir. Polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

Örnek

•Aşağıdaki fonksiyonları inceleyiniz.

	Fonksiyon	Derecesi
a)	$f(x) = 3$	Sıfırıncı dereceden polinom fonksiyon $(y = 3x^0)$
b)	$f(x) = -\frac{2}{7}x + 4$	Birinci dereceden polinom fonksiyon
c)	$f(x) = 5x^2 - x + \frac{2}{3}$	İkinci dereceden polinom fonksiyon
d)	$f(x) = -6x^3 + 1$	Üçüncü dereceden polinom fonksiyon
e)	$f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 4$	Beşinci dereceden polinom fonksiyon
f)	$f(x) = x^8 - x^6 + 5x - 1$	Sekizinci dereceden polinom fonksiyon

Birinci Dereceden Polinom Fonksiyonlar

Birinci dereceden bir polinom fonksiyon

$$y = f(x) = mx + n, \qquad m \neq 0$$

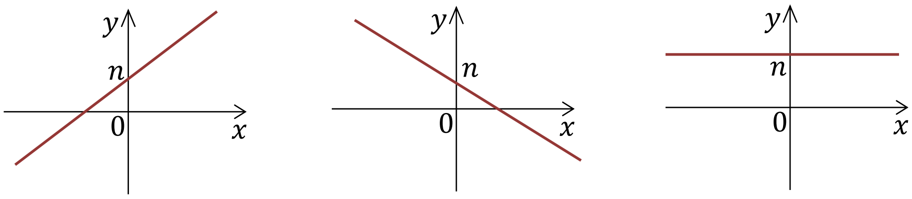
şeklindedir. Birinci dereceden bir polinom fonksiyonun grafiği *doğru*dur.

> Sıfırıncı ve birinci dereceden polinom fonksiyonlar doğrusal fonksiyonlardır ve grafikleri doğrudur.

- $m = 0$ olursa fonksiyon sıfırıncı derecedendir. Yani sabit fonksiyon olur.
- m ye doğrunun eğimi denir.
- Doğru y eksenini n de keser.
- Bu fonksiyonlara lineer (doğrusal) fonksiyonlar da denir.

$y = f(x) = mx + n$ fonksiyonunun grafiğini çizerken şu üç durumla karşılaşılır: [1]

1. DURUM: $m > 0$ **2. DURUM:** $m < 0$ **3. DURUM:** $m = 0$



Şekil 8.1

Bazen lineer fonksiyonlar farklı şekillerde de ifade edilir. Örneğin;

$$f(x) = 3x - 4, \qquad y = 3x - 4, \qquad y + 4 = 3x, \qquad 3x - y - 4 = 0$$

aynı fonksiyonun farklı yazılışlarıdır. Birinden diğerini elde etmek oldukça kolaydır.

Birinci dereceden bir fonksiyonun grafiğini çizmek için herhangi iki noktasını bulup bu noktalardan geçen doğruyu çizmek yeterlidir. Grafiğin eksenleri kestiği noktalardan da yararlanılabilir.

> Doğrunun grafiğini çizerken, iki noktası bulunur ve bu noktalardan geçen doğru çizilir.

Örnek

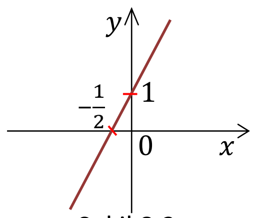
- Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.
- **1)** $f(x) = 2x + 1$
- **2)** $y = 2 - \frac{1}{2}x$
- **3)** $3x - 2y = 4$

Çözüm:

a) $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu eğimi 2 olan bir doğrudur.

$x = 0$ ise $y = f(0) = 1$ bulunur. Yani y eksenini $(0,1)$ noktasında keser.

$y = 0$ ise $x = -\frac{1}{2}$ bulunur. Yani x eksenini $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ noktasında keser.

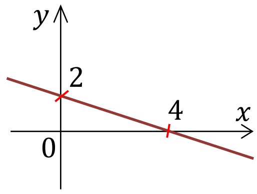


Şekil 8.2

Bu iki noktadan geçen doğrunun grafiği verilen fonksiyonun grafiğidir. (Şekil 8.2)

b) $y = 2 - \frac{1}{2}x$ fonksiyonu, eğimi $-\frac{1}{2}$ olan ve y eksenini 2 de kesen bir doğru belirtir. Yani y eksenini $(0,2)$ noktasında keser. $y = 0$ alınarak x eksenini kestiği nokta bulunur.

$$0 = 2 - \tfrac{1}{2}x \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}x = 2 \;\Rightarrow\; x = 4$$



Şekil 8.3

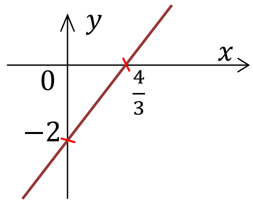
elde edilir. Yani x eksenini $(4,0)$ noktasında keser. (Şekil 8.3)

c) $3x - 2y = 4$ denklemini yeniden düzenleyelim:

$3x - 2y = 4 \;\Leftrightarrow\; 2y = 3x - 4 \;\Leftrightarrow\;$ $\boxed{y = \frac{3}{2}x - 2}$

Eğimi $\frac{3}{2}$ olan ve y eksenini -2 de kesen doğrunun grafiğini çizelim. Bu doğru x eksenini $y = 0$ için

$\frac{3}{2}x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$' te keser. (Şekil 8.4)



Şekil 8.4

Birinci dereceden bir fonksiyon bir *doğru* belirttiğine göre doğrunun özelliklerini inceleyelim.

Doğrunun Özellikleri

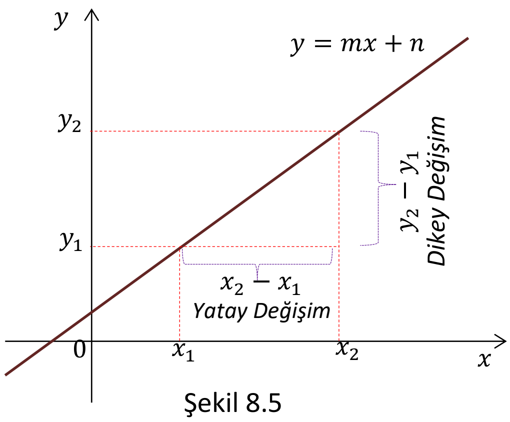
Doğrunun Eğimi ve Verilen İki Noktadan Geçen Doğrunun Denklemi

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ gibi iki noktadan geçen doğrunun eğimi

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y\ deki\ değişim}{x\ deki\ değişim} = \frac{Dikey\ değişim}{Yatay\ değişim}$$

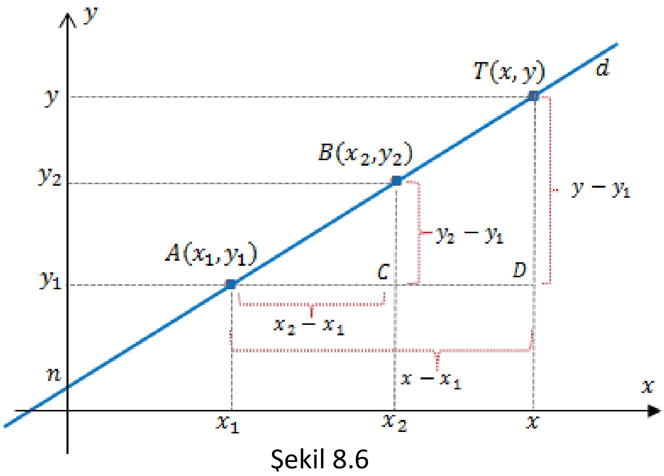
olarak tanımlanır. (Şekil 8.5)

Dikey değişimin yatay değişime oranı doğrunun eğimini verir.



Şekil 8.5

Bir $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulalım. Aşağıdaki şekilde ADT ve ACB benzer üçgenlerinden benzerlik oranlarına göre,



Şekil 8.6

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

eşitliği yazılır veya buradan A ve B noktalarından geçen doğru denklemi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

olarak bulunur. Düzenlenip y yalnız bırakılırsa doğrunun denklemi,

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m} x + \underbrace{\frac{(y_1 - y_2)x_1}{x_2 - x_1}}_{n}$$

elde edilir. Bu denklem $y = mx + n$ şeklinde yazılır. [2]

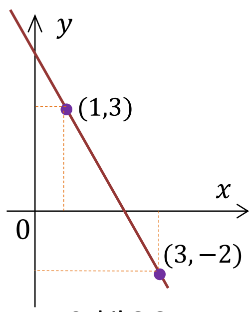
Örnek

•$A(3, -2)$ ve $B(1,3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrusunun denklemi $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1}$ olduğundan, $A(3, -2)$ ve $B(1,3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x - 3}{1 - 3} = \frac{y - (-2)}{3 - (-2)}$$

$$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{5}$$



Şekil 8.8

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$$

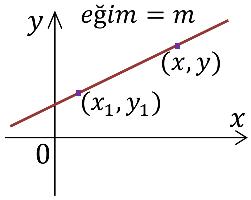
olarak bulunur. (Şekil 8.8)

Bir Noktası ve Eğimi verilen Doğrunun Denklemi

(x_1, y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğru üzerinde herhangi bir nokta (x, y) ise x ile y arasında kuracağımız cebirsel bir bağıntı bu doğrunun denklemi olacaktır. Bu iki nokta için eğim formülünden

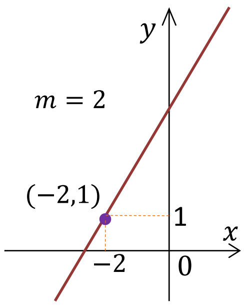
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Şekil 8.7

elde ederiz. [3] Bu son eşitlik (x_1, y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemidir. (Şekil 8.7)



Şekil 8.9

Örnek

- 1. $A(-2,1)$ noktasından geçen ve eğimi $m = 2$ olan doğrunun denklemini bulunuz.
- 2. y −eksenini $y = 3$ de kesen ve eğimi $m = \frac{1}{2}$ olan doğrunun denklemi bulunuz.

Çözüm: 1. (x_1, y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ olduğuna göre, $A(-2,1)$ noktasından geçen ve eğimi $m = 2$ olan doğrunun denklemi

$$y - 1 = 2(x - (-2))$$

$$y = 2x + 5$$

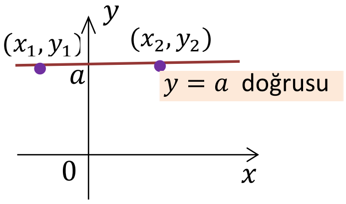
bulunur. (Şekil 8.9)

Çözüm: 2. $y = mx + n$ doğru denkleminde $x = 0$ alırsak, doğrunun y −eksenini $y = n$'de kestiğini görürüz.

Buna göre, y −eksenini $y = 3$ de kesen ve eğimi $m = \frac{1}{2}$ olan doğrunun denklemi $y = \frac{1}{2}x + 3$ olur.

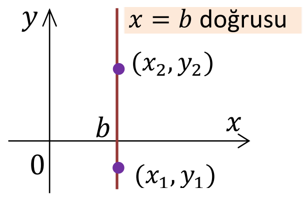
Eksenlere paralel doğrular

$x = b\ (sabit)$ doğrusunun grafiği y −eksenine paraleldir ve bu doğrunun eğimi tanımsızdır.



$$y_1 = y_2 = a$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$$
Yatay doğrunun eğimi 0 dır

Şekil 8.10



$$x_1 = x_2 = b$$
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tanımsız$$
Dikey doğrunun eğimi tanımsızdır

Şekil 8.11

x −eksenine paralel bir doğru üzerindeki bütün noktaların ikinci koordinatları eşit olduğundan eğimi $m = 0$ olur. Bu doğru y −eksenini $(0, a)$'da kesiyorsa denklemi $y = a$'dır. (Şekil 8.10)

y −eksenine paralel bir doğru üzerindeki bütün noktaların birinci koordinatları eşit olduğundan eğimi tanımsızdır. Bu doğru x −eksenini $(b, 0)$'da kesiyorsa denklemi $x = b$'dir. (Şekil 8.11)

Buna göre,

- Eğim, x deki bir birimlik artışa karşılık y de kaç birimlik artma veya azalma olduğunu belirtir.
- Yatay doğrunun eğimi sıfırdır.
- Dikey doğrunun eğimi tanımsızdır.
- Soldan sağa doğru yükselen doğrunun eğimi pozitiftir.
- Soldan sağa doğru alçalan doğrunun eğimi negatiftir.

Paralel ve Dik Doğrular

İki doğrunun eğimleri aynı ise bu doğrulara *paralel doğrular* denir. Ayrıca $x = a$ ve $x = b$ gibi (eğimleri tanımsız) $y -$ eksenine paralel doğrular da birbirine paraleldir. [4]

Paralel doğruların eğimleri eşittir.
Dik doğruların eğimleri çarpımı -1'dir.

Örneğin,

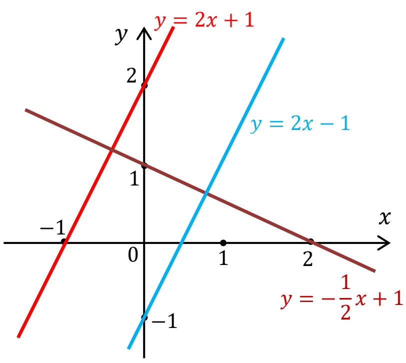
$\mathrm{y = 2x - 1}$ ve $\mathrm{y = 2x + 1}$

doğrularının eğimleri $(\mathrm{m_1 = m_2 = 2})$ eşit olduğu için paraleldirler.

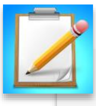
Eğimleri $\mathrm{m_1}$ ve $\mathrm{m_2}$ olan iki doğru için $\mathrm{m_1 m_2 = -1}$ ise bu iki doğru birbirine diktir. Örneğin,

$$\mathrm{y = 2x - 1} \quad \text{ve} \quad \mathrm{y = -\frac{1}{2}x + 1}$$

doğrularının eğimleri çarpımı $\mathrm{m_1 m_2} =$ $2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ olduğundan birbirine dik doğrulardır. (Şekil 8.12)



Şekil 8.12



Bireysel Etkinlik

- $(2{,}1)$ ve $(-2{,}3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini ve bu doğruya dik olup orijinden geçen doğrunun denklemini bulunuz.

İKİNCİ DERECEDEN POLİNOM FONKSİYONLAR VE PARABOL

a, b ve c reel sabitler ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$y = ax^2 + bx + c$$

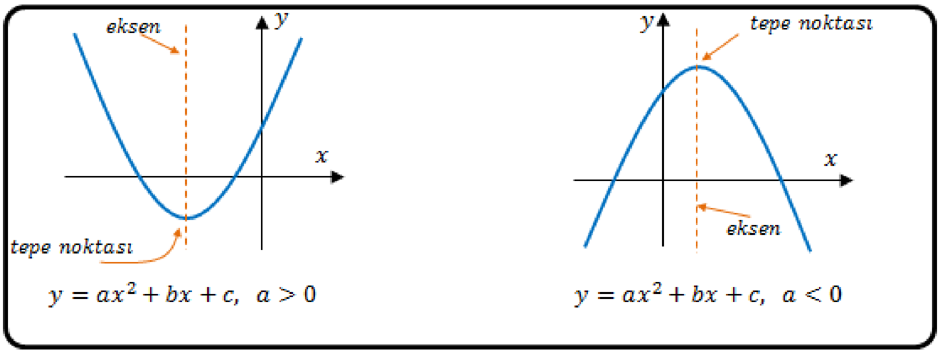
eşitliği ile verilen fonksiyon *ikinci dereceden bir polinom fonksiyon*dur.

Örneğin, $\mathrm{y} = 3\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 7$ ve $f(t) = -2t^2 + 3$ birer ikinci dereceden polinom fonksiyonlardır.

İkinci Dereceden Polinom Fonksiyonun Grafiği (Parabol)

$y = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden polinom fonksiyonun grafiği *parabol* olarak adlandırılır. Bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir. $a > 0$ ise grafik koordinat düzleminde yukarı doğru sınırsız olarak genişlemektedir. Bu durumda parabolün kolları yukarı doğrudur. $a < 0$ ise parabolün kolları koordinat düzleminde aşağı doğrudur.

Her bir parabol, simetri ekseni denilen dikey bir doğruya göre simetriktir. Bu simetri ekseninin parabolü kestiği noktaya parabolün *tepe noktası* denir. Bu tepe noktasında, $a > 0$ ise y en küçük değerini, $a < 0$ ise y en büyük değerini alır. [5] (Şekil 8.13'ü inceleyiniz.)



Şekil 8.13

Parabolün tepe noktası ve eksenleri kestiği noktalar bilinirse grafiği rahatlıkla çizilebilir. Şimdi tepe noktasını tespit edelim:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunu (parabol denklemini)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

şeklinde ele alalım. $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ olduğundan, $x = -\frac{b}{2a}$ için $a > 0$ olduğunda $f(x)$ en küçük, $a < 0$ olduğunda $f(x)$ en büyük değerini alır. Yani tepe noktasının birinci koordinatı $x = -\frac{b}{2a}$'dır. x'in bu değerine karşılık y koordinatı

$y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ olur. Böylece tepe noktasının koordinatlarını

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

olarak buluruz.

Şimdi de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktaları araştıralım:

- $x = 0$ için $y = c$ elde ederiz. Yani grafik $y-$eksenini $(0, c)$ noktasında keser.
- $y = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini çözmeliyiz.
  - $b^2 - 4ac < 0$ ise çözüm yoktur. Grafik $x-$eksenini kesmez. Bu halde; $a > 0$ ise grafik $x-$ekseninin üstünde , $a < 0$ ise grafik $x-$ekseninin altında kalır.
  - $b^2 - 4ac = 0$ ise grafik $x-$eksenini bir tek $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ noktasında keser. Bu nokta tepe noktası olur ve grafik $x-$ekseninin ya altında ya da üstünde kalır.
  - $b^2 - 4ac > 0$ ise denklemin

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

gibi iki çözümü vardır. Buna göre grafik $x-$eksenini $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$ ve $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$

noktalarında keser.

Örnek

•$y = 2x^2 - 3x - 2$ *parabolünün grafiğini çiziniz.*

Çözüm: $a = 2,\ \mathrm{b} = -3,\ \mathrm{c} = -2$ dir. $a > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğru açılır. Eksenleri kestiği noktaların ve tepe noktasının koordinatlarını bulup grafiği çizelim.

$x = 0$ ise $y = -2$ olur. Yani y −eksenini $(0,-2)$ de keser.

$y = 0$ ise $2x^2 - 3x - 2 = 0$ denkleminin çözümü olarak

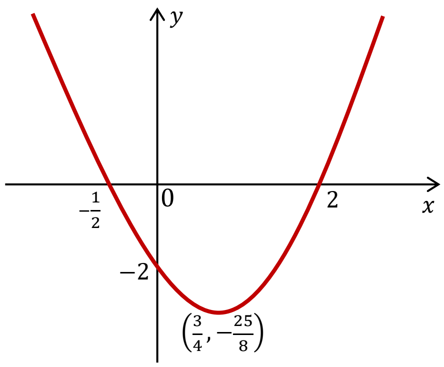
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{(-3)^2-4.2.(-2)}}{2.2} = -\frac{1}{2}$$

ve

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{(-3)^2-4.2.(-2)}}{2.2} = 2$$

elde ederiz. Buna göre parabolün x −eksenini kestiği noktalar $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ve $(2,0)$ olur.

Tepe noktası $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = T\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$ noktasıdır. (Şekil 8.14)



Şekil 8.14

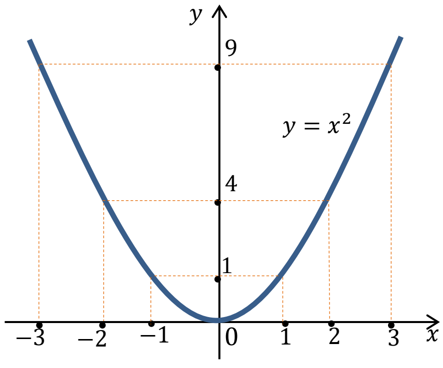
Örnek

- 1. $y = x^2$
- 2. $y = -x^2$
- 3. $y = x^2 + c$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm:

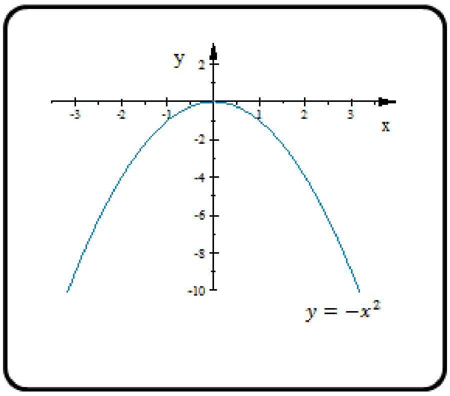
1. $y = x^2$ fonksiyonu eksenleri $(0,0)$ noktasında, yani orijinde keser. Kollar yukarı doğru açılır. $(0,0)$ noktası aynı zamanda parabolün tepe noktasıdır. Grafiği çizmek için parabolün geçtiği birkaç nokta daha tesbit edip bu noktalardan yararlanalım. (Şekil 8.15)

x	$y = x^2$	Parabolün noktası
-3	9	(-3,9)
-2	4	(-2,4)
-1	1	(-1,1)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)
3	9	(3,9)

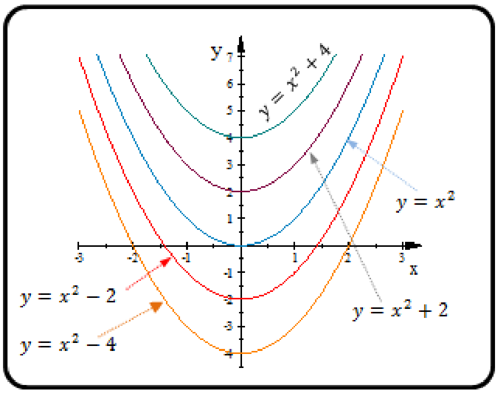


Şekil 8.15

2. $y = -x^2$ fonksiyonunun grafiği ($y = -x^2$ parabolü) $(0,0)$ noktasında eksenleri keser ve kollar aşağı doğru açılır. (Şekil 8.16)



Şekil 8.16



Şekil 8.17

3. $y = x^2 + c$ parabolünün grafiği, $y = x^2$ parabolünün grafiğinin $c > 0$ ise c kadar yukarı, $c < 0$ ise c kadar aşağı kaydırılmasıyla oluşur (Şekil 8.17).

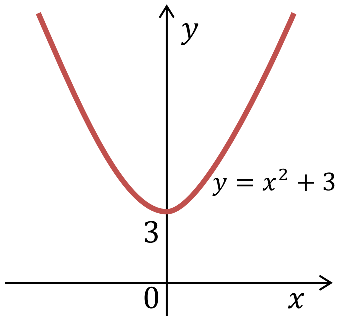
Örnek

- 1. $y = x^2 + 3$
- 2. $y = -x^2 - 4$
- 3. $y = -x^2 + 9$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm:

1. $y = x^2$ parabolünün çizimini biliyoruz. Bu grafiğin 3 birim yukarı kaydırılmasıyla $y = x^2 + 3$ parabolü çizilmiş olur veya aşağıdaki durumları göz önüne alarak da çizebiliriz: (Şekil 8.18)

   - $x = 0$ ise $y = 3$ olur. Yani y −eksenini $y = 3$ de keser.
   - $y = 0$ için $x^2 + 3 = 0$ denkleminin çözümü yoktur. Yani x −eksenini kesmez.
   - x^2 nin katsayısı pozitif olduğundan kolları yukarı doğrudur.
   - Gerekirse geçtiği birkaç nokta da bulunup grafik çizilirken bu noktalardan da yararlanılır.

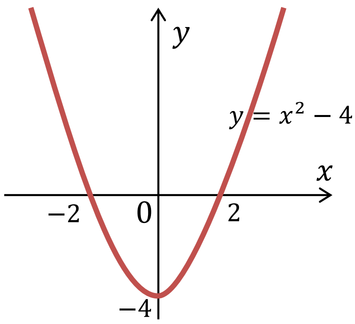


Şekil 8.18

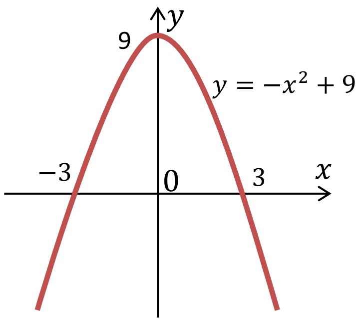
2. $y = x^2 - 4$ parabolünü çizelim:

   - $x = 0$ ise $y = -4$ olur. Yani y −eksenini $(0, -4)$ de keser. Bu aynı zamanda tepe noktasıdır.
   - $y = 0$ ise $x^2 - 4 = 0$ denkleminin çözümü $x = \mp 2$'dir. Yani x −eksenini $x = -2$ ve $x = 2$'de keser.
   - x^2 nin katsayısı pozitif olduğundan kolları yukarı doğrudur.

Bu bilgiler $y = x^2 - 4$ parabolünün çizilmesi için yeterlidir veya kısaca $y = x^2$ parabolünün 4 birim aşağı kaydırılmasıyla da çizilir. (Şekil 8.19)



Şekil 8.19



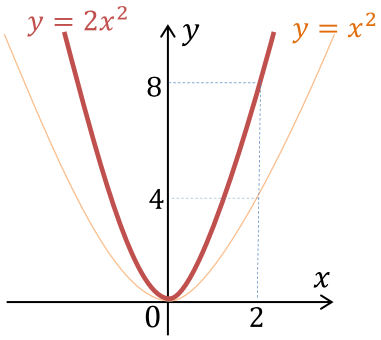
Şekil 8.20

3. $y = -x^2$ parabolünü 9 birim yukarı kaydırırsak $y = -x^2 + 9$ parabolünü çizmiş oluruz. (Şekil 8.20)

Örnek

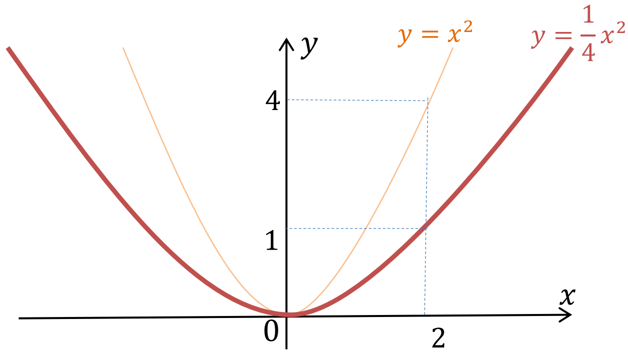
- 1. $y = 2x^2$
- 2. $y = \frac{1}{4}x^2$
- 3. $y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözüm: 1. ve 2.



Şekil 8.21

Üstteki şekilde
$y = x^2$ ve $y = 2x^2$
fonksiyonlarının grafikleri
karşılaştırılmıştır.



Şekil 8.22

Üstteki şekilde
$y = x^2$ ve $y = \frac{1}{4}x^2$
fonksiyonlarının grafikleri
karşılaştırılmıştır.

Çözüm: 3.

Bu fonksiyon $a = 1,\ b = -2,\ c = -3$ ile ikinci dereceden bir Polinom fonksiyondur. $a > 0$ olduğundan grafik yukarı doğru açılan bir paraboldür.

- $x = 0$ alırsak $y = -3$ olur. Yani y −eksenini $(0, -3)'$te keser.
- $y = 0$ için $x^2 - 2x - 3 = 0$ denklemini çözerek x −eksenini kestiği noktaları buluruz.

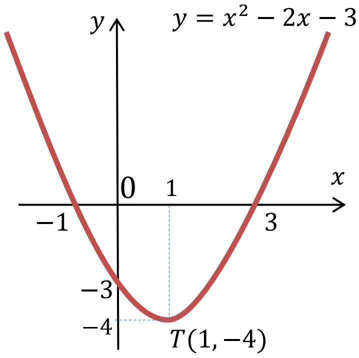
$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$

olduğundan denklemin iki kökü vardır. Bunlar

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -1$ ve

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 3$ dir.

Yani x −eksenini $(-1,0)$ ve $(3,0)$ noktalarında keser.



Şekil 8.23

- Parabolün tepe noktası

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-2}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1}\right) = (1, -4)$$

noktasıdır. (Şekil 8.23)

Örnek

•$y = -2x^2 - 2x + 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

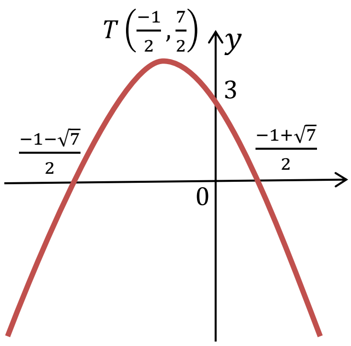
Çözüm: $a = -2 < 0$ olduğundan grafik aşağı doğru açılır.

- $x = 0$ için y −eksenini $y = 3$'te keser
- $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 28 > 0$ olduğundan grafik x −eksenini

$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, 0\right)$ ve $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right) = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, 0\right)$

noktalarında keser.

- Tepe noktası $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ noktasıdır. (Şekil 8.24)



Şekil 8.24

Bireysel Etkinlik

- $f(x) = x^2 - 6x + 8$
- $y = 3x^2 + 12x + 4$
- $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
- $y = 3x^2 - 2x + 1$ ikinci dereceden fonksiyonların eksenleri kestiği noktalarını, tepe noktalarını bulup grafiklerini çiziniz.

ÜÇÜNCÜ VE DAHA YÜKSEK DERECEDEN POLİNOM FONKSİYONLAR

Polinom fonksiyonları incelerken polinomun çarpanlara ayrılması işleri kolaylaştırır.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^2 + a_0,\ a_n \neq 0$ polinomu verilsin.

$f(x) = 0$ denklemine *polinom denklem* denir. Bu denklemin çözümüne (köklerine) *$f(x)$ polinomunun sıfırı* denir.

- Eğer $f(k) = 0$ ise $(x-k)$, $f(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.
- Eğer $(x-k)$, $f(x)$ polinomunun bir çarpanı ise $f(k) = 0$'dır.
- Polinomun katsayıları birer tamsayı ve $(px+q)$, $f(x)$ in bir çarpanı ise p, a_n' nin böleni, q da a_0'ın bölenidir.

Buna göre $a_n = 1$ ise polinomu sıfır yapan değerleri a_0 ın çarpanlarından biri olarak aramak gerekir. Eğer k sayısı a_0 ın çarpanlarından birisi ve $f(k)$ =0 ise polinomun bir çarpanı olarak $(x-k)$ yı bulmuş oluruz. $f(x)$ polinomunun $(x-k)$ ya bölerek diğer çarpanı buluruz.

Örnek

- P(x)=2x$^3 - 3x^2 + 1$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

Çözüm:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

bölenler ∓ 1 ∓ 2 ∓ 1

Muhtemel çarpanlar:

$(x-1)$, $(x+1)$, $(2x-1)$, $(2x+1)$

$x = 1$ için $P(1) = 0$ olduğundan $(x-1)$ polinomun çarpanıdır.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 1 & x-1 \\ \cline{2-2} 2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - x - 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -x + 1 & \\ -x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Buna göre polinom $P(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$ şeklinde çarpanlara ayrılmış olur.

Örnek

•$(x-3)$, $(x-1)$, $(x+2)$ ifadelerinden hangisi P$(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ polinomunun çarpanıdır?

Çözüm:

$(x-3)$ için $P(3) = 2(3)^3 + 7(3)^2 + 7(3) + 2 \neq 0$, $(x-3)$ çarpan değildir.

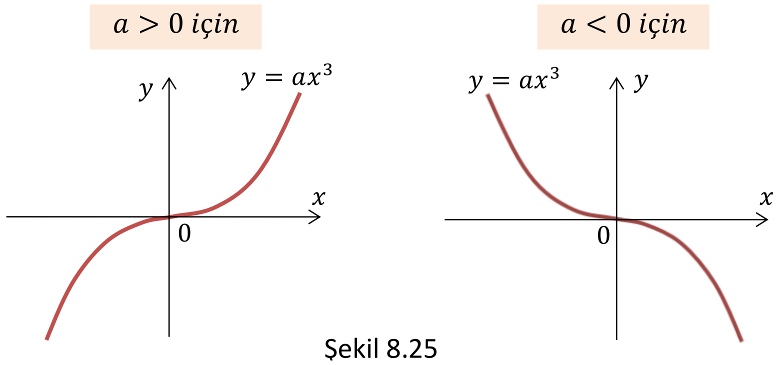
$(x-1)$ için $P(1) = 2(1)^3 + 7(1)^2 + 7(1) + 2 \neq 0$, $(x-1)$ çarpan değildir.

$(x+2)$ için $P(-2) = 2(-2)^3 + 7(-2)^2 + 7(-2) + 2 = 0$, $(x+2)$ çarpandır.

Üçüncü Dereceden Polinom Fonksiyonlar

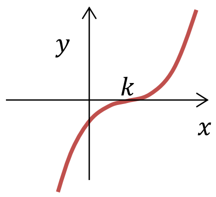
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, fonksiyonu üçüncü dereceden polinom fonksiyondur.

Önce $f(x) = ax^3$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Grafiği aşağıdaki gibidir (Şekil 8.25).

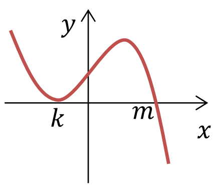


Şekil 8.25

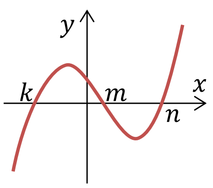
Diğer bütün $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ üçüncü dereceden polinom fonksiyonlar çarpanlarına ayrılırken aşağıdaki dört durumdan biri ile karşılaşılır.



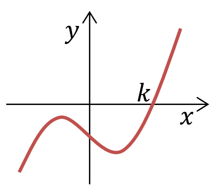
- $f(x) = a(x-k)^3 = a(x-k)(x-k)(x-k)$.
  Bu durumda birbirine eşit üç kökü vardır, bu da $x = k$'dır. Grafik çizilirken x −eksenini sadece $x = k$'da keser.



- $f(x) = a(x-k)^2(x-m)$
  Bu durumda, köklerden ikisi eşit, biri farklıdır. Bunlar $x_1 = x_2 = k$ (iki katlı kök), ve $x_3 = m$ dir. Grafik x −eksenine $x = k$ da dokunur, $x = m$'de keser.



- $f(x) = a(x-k)(x-m)(x-n)$
  Bu durumda, $x = k, x = m, x = n$ gibi üç farklı kök vardır. Grafik x-eksenini üç farklı noktada keser.



- $f(x) = a(x-k)(x^2 + px + q)$ Burada bir ikinci dereceden çarpan (kökleri olmayan) ve bir de birinci dereceden çarpan vardır. Polinom fonksiyonun kökü sadece $x = k$'dır.

Örnek

- 1) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$
- 2) $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$
- 3) $y = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

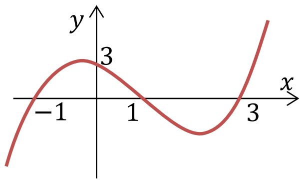
Çözüm:

1) $= x^2(x-3) - (x-3)$

$= (x^2 - 1)(x - 3)$

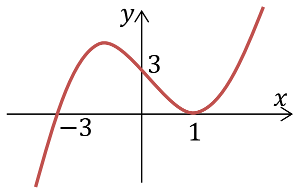
$= (x+1)(x-1)(x-3)$

Yani $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$ olur.



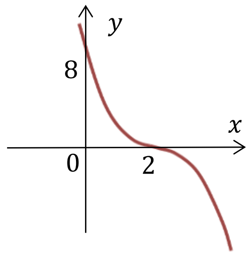
2) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

$= (x-1)^2(x+3)$



3) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

$= (2 - x)^3$



Özet

- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sabit reel sayılar ve $a_n \neq 0$ olmak üzere
  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^2 + a_0$$ fonksiyonuna *n* yinci dereceden bir *polinom fonksiyon* denir.
- Polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesi reel sayılar kümesidir.
- $f(x) = 5 = 5x^0$ sıfırıncı dereceden bir polinom fonksiyondur.
- $f(x) = 7x + 8$ birinci dereceden bir polinom fonksiyondur.
- $f(x) = 4x^2 - 3x + 6$ ikinci dereceden bir polinom fonksiyondur.
- $f(x) = x^7 + 2$ yedinci dereceden bir polinom fonksiyondur.
- Birinci dereceden bir polinom fonksiyonun grafiği koordinat düzleminde bir **doğru**dur. Doğrunun denklemi $ax + by + c = 0$ veya $y = mx + n$ şeklindedir. Burada m ye doğrunun eğimi denir. Eğim doğru boyunca y deki değişimin x deki değişime oranıdır.
- Bir doğrunun grafiğini çizmenin pratik bir yolu, doğru üzerinde iki nokta bulup bu noktalardan geçen doğruyu çizmektir.
- $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğru denklemi
  $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ dir.
- (x_1, y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi
  $$y - y_1 = m(x - x_1)$$ dir.
- Paralel doğruların eğimleri eşittir. Dik doğruların eğimleri çarpımı -1 dir. Tersine, eğimleri eşit olan doğrular paralel, eğimleri çarpımı -1 olan doğrular diktir.
- $a \neq 0$ olmak üzere $y = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden Polinom fonksiyonun grafiği koordinat düzleminde bir **parabol**dür. Her bir parabol, simetri ekseni denilen dikey bir doğruya göre simetriktir. Bu simetri ekseninin parabolü kestiği noktaya parabolün **tepe noktası** denir. Bu tepe noktasında, $a > 0$ ise y en küçük değerini, $a < 0$ ise y en büyük değerini alır.
- $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiği olan parabolü çizmek için, parabolün tepe noktasını ve eksenleri kestiği noktaları bulup bu noktalardan yararlanırız. a > 0 ise grafik koordinat düzleminde yukarı doğru sınırsız olarak genişlemektedir. Bu durumda parabolün kolları yukarı doğrudur deriz. a < 0 ise parabolün kolları koordinat düzleminde aşağı doğrudur.
- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},$ fonksiyonu üçüncü dereceden polinom fonksiyondur.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin grafiği doğru <u>belirtmez</u>?
   a) $y = 2x$
   b) $y = x^2$
   c) $y = x - 2$
   d) $y = 2$
   e) $x = 2$

2. $(1,3)$ ve $(-2,2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$
   b) $y = 3x + 8$
   c) $y = x + 3$
   d) $y = 3x + \frac{8}{3}$
   e) $y = 8x + 3$

3. $(1,3)$ noktasından geçen ve eğimi $m = -2$ olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = -2x + 3$
   b) $y = -2x$
   c) $y = -2x + 5$
   d) $y = 3x - 2$
   e) $y = 3x + 1$

4. Aşağıdaki doğru çiftlerinden hangileri diktir?
   a) $y = 2x - 1$, $y = \frac{1}{2}x + 3$
   b) $y = 3x - 2$, $y = 3x + \frac{1}{2}$
   c) $y = -2x + 1$, $y = \frac{1}{2}x - 3$
   d) $y = x + 2$, $y = -x - 2$
   e) $y = -2x + 3$ $y = 2x - 3$

5. $2x - 4y + 1 = 0$ doğrusuna dik olan ve $(-1,2)$ noktasından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = -2x$
   b) $y = 2x$
   c) $y = -2x + 5$
   d) $y = 2x + 1$
   e) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

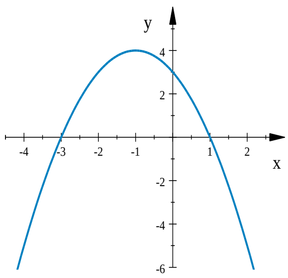
6. $(4, -1)$ ve $(1,2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $-\frac{1}{5}$
   b) -1
   c) 1
   d) 5
   e) $-\frac{1}{4}$

7. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin grafiği paraboldür?
   a) $y = 2x - 3$
   b) $y = x^2 - x$
   c) $y = 2x^3 - 2x + 5$
   d) $y = 3$
   e) $y = |x|$

8. Aşağıdaki parabollerden hangisi x-eksenini <u>kesmez</u>?
   a) $y = x^2$
   b) $y = x^2 - 2x - 3$
   c) $y = x^2 - 2x + 3$
   d) $y = -x^2 + 2x + 2$
   e) $y = -x^2 + 1$

9. $y = -2x^2 + 4x - 1$ parabolünün tepe noktası aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $(1,4)$
   b) $(1,1)$
   c) $(1, -1)$
   d) $(-1, -2)$
   e) (0,0)

10. Yandaki parabol aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin grafiğidir?
    a) $y = x^2 - 2x + 3$
    b) $y = -2x^2 + 2x - 3$
    c) $y = x^2 - 2x$
    d) $y = -x^2 - 2x + 3$
    e) $y = -x^2 + 4$



Cevap Anahtarı

1.b, 2.a, 3.c, 4.c, 5.d, 6.b, 7.b, 8.c, 9.b, 10.d

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Balcı, M. (1999). Matematik Analiz (1. Cilt). Balcı Yayınları. ISBN: 975-6683-02-03. Ankara.

[2] Kadıoğlu, E. ve Kamali, M, (2009). Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-975-8151-57-8. Erzurum.

[3] Sağel, M. K. ve Aktaş M., (2010), Genel Matematik 1. Pegem Akademi. ISBN: 978-605-364-062-2. Ankara.

[4] Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.,(2009) Temel Matematiksel Analiz. Çev. Demir S., Uzun Ö., Balce A. O., Çağlar A. Akademi Yayıncılık, ISBN:987-975-6885-21-5. Ankara.

[5] Cirrito F. (Editör), Bukle N., Dunbar I., (2009). Mathematics Higer Level. IBID Press. ISBN: 1 876659 11 4. Australia.

ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONU

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

İÇİNDEKİLER

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Ömer TARAKCI

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Üstel fonksiyonu tanıyacak,
  - Üstel fonksiyonun özelliklerini öğrenecek,
  - Logaritma fonksiyonunu tanıyacak,
  - Logaritmanın özelliklerini öğrenecek,
  - Üstel ve logaritma fonksiyonunun grafiklerini çizebilecek,
  - Üstel ve logaritmik ifadeler içeren denklemleri çözebileceksiniz.

ÜNİTE

9

ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONU

Üstel Fonksiyonlar

- Üstel Fonksiyonun Tanımı
- Üstel Fonksiyonun Özellikleri
- Üstel Fonksiyon İçin bazı Uygulamalar

$$e = 2.71828\ldots$$

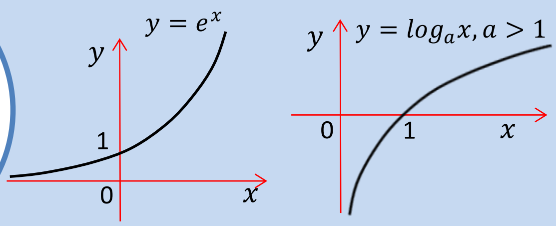
$$f(x) = e^x$$

Logaritma Fonksiyonu

- Logaritma Fonksiyonun Tanımı
- Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$$

Üstel ve Logaritma Fonksiyonlarının Grafikleri



Üstel ve Logaritmik İfadeli Denklemlerin Çözümü

$$\log_3 4 \log_4 5 \log_5 6 = \cancel{\log_3 4}\,\frac{\cancel{\log_3 5}}{\cancel{\log_3 4}}\,\frac{\log_3 6}{\cancel{\log_3 5}} = \log_3 6$$

GİRİŞ

Belli bir büyüklük, belli bir zamanda ve belli bir olayın etkisinde kalarak kendisine oranla değişiklik gösterebilir. Bu duruma, nüfus artışı, ekonomik büyüme hesapları, bileşik faiz hesapları gibi birçok hesaplama türünü örnek gösterebiliriz. Bu tür hesaplamaları yaparken üstel fonksiyonlar karşımıza çıkar.

Logaritma fonksiyonu ise üstel fonksiyonun ters fonksiyonudur. Üstel olarak artan çokluklarda, çok büyüyen sayılarla işlem yapmanın zorluğundan kurtulmak için bu sayı yerine belli bir tabana göre sayının logaritması kullanılır.

ÜSTEL FONKSİYON

TANIM: a pozitif bir reel sayı ve $a \neq 1$ olsun.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x$

fonksiyonuna *üstel fonksiyon*, a ya da *üstel fonksiyonun tabanı* denir.

Üstel fonksiyonda taban pozitif bir sabit sayıdır. Taban 1 alınmaz.

Her x için $a^x > 0$ olur. Bu nedenle üstel fonksiyonun görüntü kümesi pozitif reel sayılar kümesidir.

Tanıma göre,

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x, \quad h(x) = \pi^x, \quad s(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$$

birer üstel fonksiyonlardır. Ancak,

$$f(x) = (-2)^x, \quad g(x) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x, \quad h(x) = 1^x$$

Birer üstel fonksiyon değildirler.

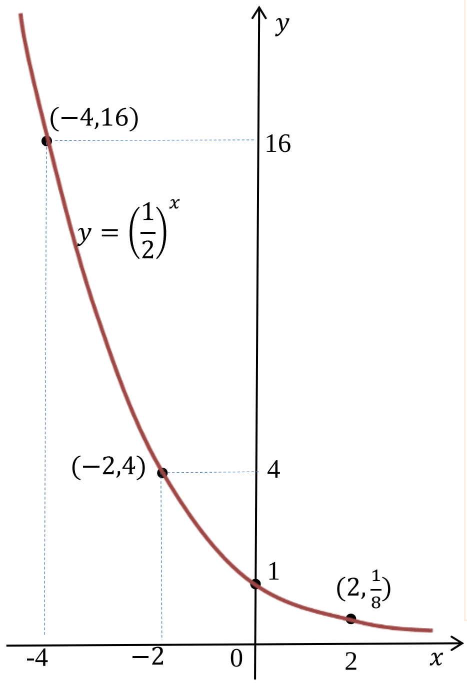
Örnek

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonlarının grafiklerini x 'e değerler vererek çiziniz.

Çözüm: $y = 2^x$ ve $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için x in bazı değerlerini yazarak aşağıdaki gibi bir tablo oluşturalım (Tablo 9.1).

Tablo 9.1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$
$y = 2^x$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^{0} = 1$	$2^{1} = 2$	$2^{2} = 4$	$2^{3} = 8$	$2^{4} = 1$	2^{5}



Şekil 9.1

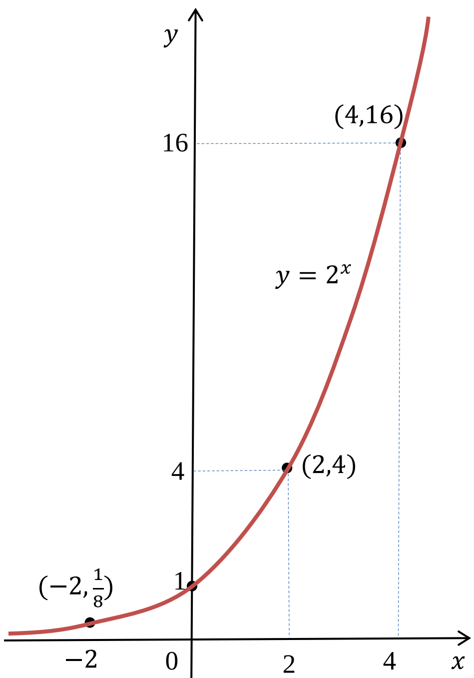
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun özellikleri

1. Fonksiyon bütün x değerleri için azalandır. (Yani x arttıkça y azalmaktadır)

2. Fonksiyon daima pozitifdir. (Yani grafiği $x-$ ekseninin üstünde kalır)

3. $x \to \infty$ $için$ $y \to 0$
   $x \to -\infty$ $için$ $y \to \infty$
   (x büyüdükçe y sıfıra yaklaşmaktadır)

4. $x < 0$ $için$ $y > 1$
   $x = 0$ $için$ $y = 1$ (şekil 9.1)



Şekil 9.2

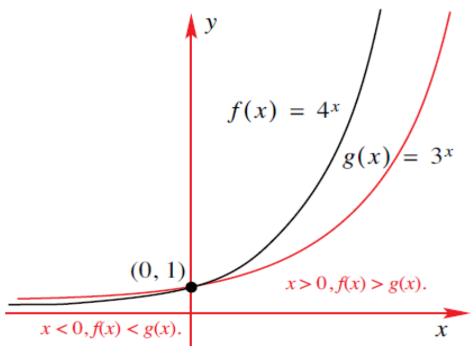
$f(x) = 2^x$ fonksiyonunun özellikleri

1. Fonksiyon bütün x değerleri için artandır. (Yani x arttıkça y de artmaktadır)
2. Fonksiyon daima pozitiftir. (Yani grafiği $x-$ ekseninin üstünde kalır)
3. $x \to \infty$ $için$ $y \to \infty$

   $x \to -\infty$ $için$ $y \to 0$

   (x küçüldükçe y sıfıra yaklaşmaktadır)
4. $x < 0$ $için$ $0 < y < 1$
   $x = 0$ $için$ $y = 1$

   $x > 0$ $için$ $1 < y$ (Şekil 9.2)



Şekil 9.3

Benzer şekilde;
$f(x) = 4^x$ ve $g(x) = 3^x$
Fonksiyonlarının grafikleri yanda verilmiştir. Karşılaştırınız (Şekil 9.3).

Üstel fonksiyonun grafiği çizilirken a nın (tabanın) 1'den büyük veya 1'den küçük olması göz önüne alındığında aşağıdaki duruma dikkat edilmelidir.

$f(x) = a^x,\ \ 1 > a, \qquad x \in \mathbb{R}$

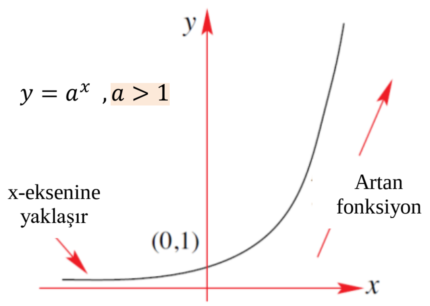
Tanım kümesi : $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Görüntü kümesi : $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

Diğer : y −eksenini $(0,1)$ de keser.

Artan fonksiyondur.

x küçüldükçe y sıfıra yaklaşır.



şekil 9.4

$f(x) = a^x,\ \ 0 < a < 1, \qquad x \in \mathbb{R}$

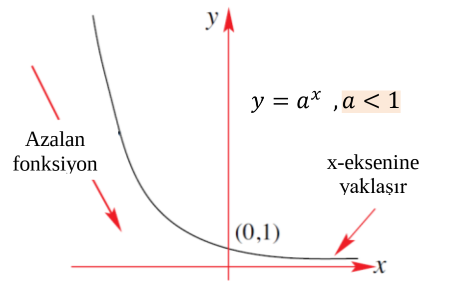
Tanım kümesi : $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Görüntü kümesi : $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

Diğer : y −eksenini $(0,1)$ de keser.

Azalan fonksiyondur.

x büyüdükçe y sıfıra yaklaşır.



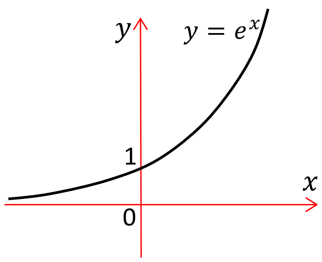
Şekil 9.5

Doğal üstel fonksiyon olarak bilinen önemli bir üstel fonksiyon vardır. Bu fonksiyonda taban $e = 2.71828\ldots$ sayısıdır. n sayısı arttıkça $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sayısının yaklaştığı değer e sayısıdır. Bu e sayısı Euler sayısı olarak da bilinir. π sayısı gibi e sayısı da bir irrasyonel sayıdır.

Tablo 9.2

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,0000000000000
2	2,2500000000000
5	2,4883200000000
10	2,5937424601000
100	2,7048138294215
1000	2,7169239322355
10000	2,7181459268244
100000	2,7182682371975
1000000	2,7182804691564
↓	↓
∞	2,7182818284591

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 9.6

Üstel fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki özellikler vardır:

Tablo 9.3

	Kural
1	$a^0 = 1, \quad a \neq 0$
2	$a^1 = a$
3	$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
4	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5	$(a^x)^y = a^{xy}$
6	$a^x a^y = a^{x+y}$
7	$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$
8	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
9	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Örnek

•Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$(5)^0 = 1, \qquad 7^0 = 1$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{\pi}{2}\,, \qquad 6^1 = 6$
$2^{-x} = \frac{1}{2^x}, \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$2^x 5^x = (2 \cdot 5)^x = 10^x$
$(5^x)^y = 5^{xy}, (3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6 = 729$
$4^x 4^y = 4^{xy}, \;\; 2^2 2^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$
$3^{2x+1} = 3^{x-1} \Rightarrow 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x = -2$
$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$
$\frac{2^3}{4^3} = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Örnek

- $3^{x+1} = 3\sqrt{3}$ ise x 'in değerini bulunuz.
- $10^x = 0.001$ ise x 'in değerini bulunuz.
- $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$ ifadesini sadeleştiriniz.
- $\frac{4x^2(-y^{-1})^{-2}}{(-2x^2)^3(y^{-2})^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.
- $3^{x^2-5x+2} = 9^{x+1}$ ise x 'in değerini bulunuz.

Çözüm:

1. $3^{x+1} = 3\sqrt{3} \Rightarrow 3^{x+1} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{x+1} = 3^{1+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 3^{x+1} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

2. $10^x = 0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

3. $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}} = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{xy}{1} = \frac{xy}{x}+\frac{xy}{y} = y+x$

4. $\frac{4x^2(-y^{-1})^{-2}}{(-2x^2)^3(y^{-2})^2} = \frac{(4x^2)y^{(-1)(-2)}}{(-2)^3x^{2\cdot3}y^{(-2)2}} = \frac{4x^2y^2}{-8x^6y^{-4}} = \frac{x^{2-6}y^{2-(-4)}}{-2} = \frac{x^{-4}y^6}{-2} = -\frac{y^6}{2x^4}$

5. $3^{x^2-5x+2} = 9^{x+1} \Rightarrow 3^{x^2-5x+2} = (3^2)^{x+1} \Rightarrow 3^{x^2-5x+2} = 3^{2(x+1)}$

$\Rightarrow 3^{x^2-5x+2} = 3^{2x+2)}$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 2x + 2$

$\Rightarrow x^2 - 7x = 0$

$\Rightarrow x(x-7) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ \ veya \ \ x = 7$

Üstel Fonksiyon İçin Bazı Uygulamalar

Bir t zaman aralığında, bir P büyüklüğündeki değişim miktarı b ise $r = \frac{b}{P}$ ye değişme oranı denir.

Buna göre t_0 başlangıç anında P büyüklüğündeki bir nesnenin $t = 1$ (birim zaman) aralığındaki değişme oranı r ise n bir pozitif tamsayı olmak üzere, nt zamanda bu büyüklüğün hangi miktara ulaştığını bulalım:

Zaman		Büyüklük
t_0	$\rightarrow$	P
t_0+1	$\rightarrow$	$P + rP = (1+r)P$
t_0+2	$\rightarrow$	$(1+r)P + r(1+r)P = (1+r)^2P$
t_0+3	$\rightarrow$	$(1+r)^2P + r(1+r)^2P = (1+r)^3P$

$\vdots$		$\vdots$
$t_0 + n$	$\rightarrow$	$(1+r)^n P$

Ulaşılan büyüklük $y = P(1+r)^n$ biçiminde zamanın bir üstel fonksiyonu olarak karşımıza çıkar. Belli zaman aralıklarında miktarda azalma durumu varsa ulaşılan büyüklük $y = P(1-r)^n$ olur. Yani;

artma durumunda $\quad y = P(1+r)^n$

azalma durumunda $\quad y = P(1-r)^n$

yazılır. Burada $P = 1$ alınırsa $y = (1+r)^n$ sayısı n tane birim zaman sonunda büyüklüğün kaç katına çıktığını gösterir. Bu ise üstel fonksiyon olup bileşik faiz hesaplarında kullanılabileceğini gösterir.

Örneğin; $t = 1$ yıl alınırsa P ile ana parayı, r ile yıllık faiz oranı gösterilirse n yıl sonra paranın ulaştığı miktar $y = P(1+r)^n$ olur.

Örnek

- 10000 TL anapara yıllık %20 (bileşik) faizle vadeli olarak bankaya yatırılırsa dört yıl sonra ana para kaç liraya ulaşır.

Çözüm: $P = 10000 \;\; TL \;\; , \;\; r = \frac{20}{100}, \;\; n = 4$ için

$$y = P(1+r)^n = 10000\left(1 + \frac{20}{100}\right)^4 = 10000\left(\frac{12}{10}\right)^4 = 20736\, TL$$

Örnek

- 3550 nüfuslu bir ilçenin nüfusu yılda 0,03 oranında artıyor. 10 yıl sonra bu köyün nüfusu kaç kişi olur?

Çözüm: $P = 3550 \;\; Kişi \;\; , \;\; r = \frac{3}{100}, \;\; n = 10$ için

$$y = P(1+r)^n = 3550\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10} = 3550\left(\frac{103}{100}\right)^{10} = 4771 \;\; Kişi$$

Örnek

•Günde 8 kat artma özelliğine sahip 3000 hücreli bir bakteri topluluğu 5. Gün sonunda kaç hücreli bir bakteri topluluğu oluşturur?

Çözüm: $P = 3000 \;\; Hücre \;\; , \;\; r = 8, \;\; n = 5$ için

$$y = P(1+r)^n = 3000(1+8)^5 = 3000(9)^5 = 177147000 \;\; Hücre$$

LOGARİTMA FONKSİYONU

$a > 0,\; a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\;\; f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olduğundan ters fonksiyonu vardır. Üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna *logaritma fonksiyonu* denir. Buna göre;

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = log_a x \quad a > 0,\; a \neq 1$$

fonksiyonu x in a tabanına göre logaritmasını verir.

$log_a x$
a nın hangi kuvvetinin x olduğunu söyler.

Üstel ve logaritma fonksiyonlarından biri diğerinin tersi olduğuna göre, aralarında

$$y = a^x \;\; \Leftrightarrow \;\; x = log_a y$$

bağıntısı yazılabilir.

Örneğin;

$8 = 2^3 \;\; \Leftrightarrow \;\; log_2 8 = 3$

$81 = 3^4 \;\; \Leftrightarrow \;\; log_3 81 = 4$

$0{,}0001 = 10^{-4} \;\; \Leftrightarrow \;\; log_{10}(0{,}0001) = -4$

$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$

Ayrıca, $a > 0$ için $a^o = 1$ olduğundan $log_a 1 = 0$ ve $a^1 = a$ olduğundan $log_a a = 1$ dir. Tabanın ‘ $e = 2{,}71828 \ldots$ ‘ alınması logaritma fonksiyonunda önemli role sahiptir. Logaritma fonksiyonunda taban e alınırsa bu fonksiyona *doğal logaritma fonksiyonu* denir. Doğal logaritma fonksiyonu $f(x) = lnx$ şeklinde gösterilir.

$$f(x) = log_e x = lnx, \qquad x > 0$$

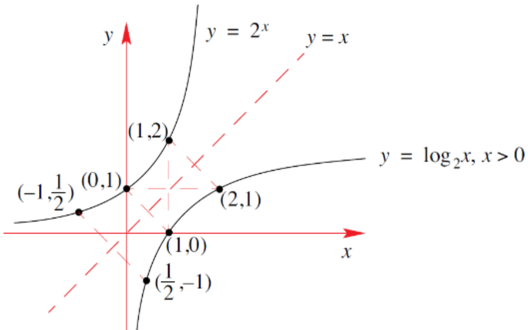
Logaritma fonksiyonunda taban yazılmamışsa tabanın 10 olduğunu anlarız

Logaritma fonksiyonunda taban genellikle e ya da 10 olarak alınır. Taban 10 seçildiği zaman genellikle taban yazılmaz.

$$f(x) = log_{10} x = logx, \qquad x > 0$$

Örnek

•$y = log_2 x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



Şekil 9.7

Çözüm:

Bir fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği, bu fonksiyonun ters fonksiyonunun grafiğidir. Buna göre $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği $y = log_2 x$ fonksiyonunun grafiğini verir.

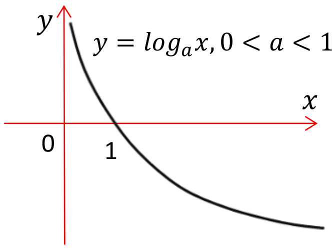
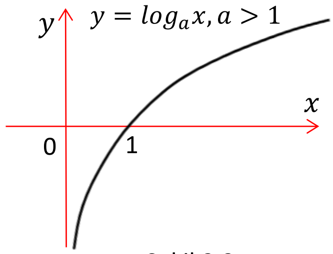
Örnek

1. $1000 = 10^3$ olduğundan $log_{10} 1000 = 3$ veya $log\ 1000 = 3$ yazarız.
2. $0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ olduğundan $log(0.001) = -3$ yazarız.
3. $log 100 = log 10^2 = 2$
4. $\log \sqrt[4]{10} = log 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$
5. $log x = -1 \Rightarrow x = ?$, cevap: $log x = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

Örnek

1. $0 < a < 1$ için $y = log_a x$ fonksiyonunun,
2. $a > 1$ için $y = log_a x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

1. $y = log_a x,\ \ 0 < a < 1$	**2.** $f(x) = a^x,\ \ 1 < a$
Tanım kümesi : $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$	**Tanım kümesi :** $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
Görüntü kümesi : $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$	**Görüntü kümesi :** $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
Asimptot : $x = 0$ $(y$ −ekseni)	**Asimptot :** $x = 0$ $(y$ −ekseni)
Diğer : x −eksenini $(1,0)$ de keser. Azalan fonksiyondur.	**Diğer :** y −eksenini $(0,1)$ de keser. Artan fonksiyondur.
 Şekil 9.8	 Şekil 9.9

Logaritma ile ilgili aşağıdaki özellikler yazılabilir.

Tablo 9.3

	$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere
1.	Pozitif olmayan reel sayıların logaritması tanımlı değildir.
2.	$\log_a 1 = 0$
3.	$\log_a a = 1$
4.	$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
5.	$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
6.	$\log_a u^b = b \cdot \log_a u$
7.	$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ $(Taban\ değiştirme\ formülü)$
8.	$a^{\log_a x} = x$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$a^{\log_a x} = x$

Örnek

1. Taban değiştirme formülünü kullanarak $logx$ ve lnx i birbiri cinsinden ifade ediniz.
2. $log_{a^b} x = \frac{1}{b} log_a x$ olduğunu gösteriniz.
3. $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 64,$ $log \sqrt[5]{10},$ $log_2 0.125$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm: 1.

$$ln10 = 2.30258\ldots \Rightarrow \frac{1}{ln10} = 0.43429\ldots$$

$$loge = 0.43429\ldots \Rightarrow \frac{1}{loge} = 2.30258\ldots$$

değerlerinin kullanılmasıyla

$$logx = log_{10}x = \frac{log_e x}{log_e 10} = \frac{lnx}{ln10} = \frac{1}{ln10}lnx \approx 0.43429lnx$$

$$lnx = log_e x = \frac{log_{10}x}{log_{10}e} = \frac{1}{loge}logx \approx 2.30258logx$$

elde edilir. (Bu hesaplamalarda hesap makinesi kullanılması gerekir)

Çözüm: 2.

$log_{a^b}x = y$ olsun. Bu durumda,

$$x = \left(a^b\right)^y = a^{by}$$

$\Rightarrow by = log_a x$ (y yerine yukarıdaki değeri yazılırsa)

$$\Rightarrow b \cdot log_{a^b}x = log_a x$$

$$\Rightarrow log_{a^b}x = \frac{1}{b}log_a x$$

elde edilir.

Çözüm: 3.

- $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}64 = log_{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}}64 = log_{2^{\frac{-1}{2}}}2^6 = \frac{1}{\frac{-1}{2}}log_2 2^6 = (-2)log_2 2^6$

  $= (-2) \cdot 6 \cdot log_2 2 = (-12) \cdot 1 = -12$

- $log\sqrt[5]{10} = log10^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}log10 = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$
- $log_2 0.125 = log_2\left(\frac{124}{1000}\right) = log_2\frac{1}{8} = log_2 2^{-3} = (-3)log_2 2 = (-3) \cdot 1 = -3$

Örnek

1) $y = \log(4 - x^2)$ 2) $y = \sqrt{\log(4 - x^2)}$

3) $y = log\frac{1+x}{1-x}$ 4) $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$

fonksiyonlarının en geniş tanım kümelerini bulunuz

Çözüm: 1) Sadece pozitif sayıların logaritması tanımlı olduğundan, $4-x^2$ ifadesini pozitif yapan x değerleri için $\log(4-x^2)$ tanımlıdır.

x	$-\infty$		-2		2		∞
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$4-x^2$ ifadesi $(-2\,,2)$ açık aralığında pozitiftir. Buna göre; $y=\log(4-x^2)$ fonksiyonu için $Tanım\ Kümesi=\{x:\ -2<x<2\}=(-2\,,2)$ dir.

2) $y=\sqrt{\log(4-x^2)}$

Negatif olmayan sayıların karekökü vardır. O hâlde $\log(4-x^2)\geq 0$ olmalıdır.

1'den büyük sayıların logaritması pozitif olduğundan

$$4-x^2\geq 1 \Leftrightarrow 3\geq x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3}\quad \text{dir.}$$

$$Tanım\ Kümesi=\{x:\ -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}\}=[-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\,]$$

3) $y=log\frac{1+x}{1-x}$ $\quad Tanım\ Kümesi=\left\{x:\ \frac{1+x}{1-x}>0\right\}=(-\infty\,,-1)\cup(1\,,\infty)$

x	$-\infty$		-1		1		∞
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$+$	0	$-$		$+$	

4) $y=3^{\frac{1}{x-2}}$

Üs kısmı tanımlı yapan x ler için üstel fonksiyon tanımlıdır. $\frac{1}{x-2}$ ifadesi $x\neq 2$ için tanımlıdır. $Tanım\ Kümesi=\mathbb{R}\setminus\{2\}=(-\infty\,,2)\cup(2\,,\infty)$

Örnek

1. $\log_2 x+log_2(x+2)=3$ denkleminin çözümünü bulunuz.
2. $log_2(7x^3)-log_2x^2+log_2\left(\frac{y}{x}\right)$ ifadesini sadeleştiriniz.
3. $log_ax=2,\quad log_ay=-3$ ise $\log_a\sqrt{\frac{x}{y^4}}$ değerini bulunuz.
4. $8^{2x+1}=4^{5-x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.
5. $log_3 4 log_4 5 log_5 6 log_6 7=?$

Çözüm: 1. $\log_2 x+log_2(x+2)=3 \Rightarrow log_2\big(x\cdot(x+2)\big)=3$

$$\Rightarrow x(x+2)=2^3$$
$$\Rightarrow x^2+2x=8$$
$$\Rightarrow x^2+2x-8=0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x=-4\quad veya\quad x=2$$

bulunur. Bulunan bu değerler denklemde kontrol edilirse

$x = -4$ için $log_2(-4)$ tanımlı değildir. (*Negatif sayıların logaritması yoktur*)

$x = 2$ için denklem sağlanır. Yani çözüm sadece $x = 2$'dir.

2. $log_2(7x^3) - log_2 x^2 + log_2\left(\frac{y}{x}\right) = log_2\left(\frac{7x^3}{x^2}\right) + log_2\left(\frac{y}{x}\right)$

$$= log_2(7x) + log_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= log_2\left(7x \cdot \frac{y}{x}\right)$$

$$= log_2(7y)$$

3. $log_a x = 2,$ $log_a y = -3$ ise

$$\log_a \sqrt{\frac{x}{y^3}} = log_a\left(\frac{x}{y^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} log_a\left(\frac{x}{y^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(log_a x - log_a y^3)$$

$$= \frac{1}{2}(log_a x - 3 log_a y)$$

$$= \frac{1}{2}\big(2 - 3(-3)\big) = \frac{11}{2}$$

4. $8^{2x+1} = 4^{5-x}$ eşitliğinde her iki tarafın logaritması alınırsa

$$log 8^{2x+1} = log 4^{5-x} \Leftrightarrow (2x+1) log 8 = (5-x) log 4$$

$$\Leftrightarrow (2x+1) log 2^3 = (5-x) log 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3(2x+1) log 2 = 2(5-x) log 2$$

$$\Leftrightarrow 6x + 3 = 10 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 8x = 7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{8}$$

bulunur.

5. Logaritmanın özelliklerinden (Taban değiştirme formülü) kullanılarak

$$log_3 4 log_4 5 log_5 6 log_6 7 = \cancel{log_3 4}\frac{\cancel{log_3 5}}{\cancel{log_3 4}}\frac{\cancel{log_3 6}}{\cancel{log_3 5}}\frac{log_3 7}{\cancel{log_3 6}} = log_3 7$$

bulunur.

Bireysel Etkinlik

1. Aşağıdaki sayıları rasyonel sayı hâlinde yazınız.

   a) $8^{\frac{1}{3}}$ b) $(27)^{-\frac{2}{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[7]{49}}$ d) $\frac{3}{\sqrt[5]{16}}$

2. Aşağıdaki sayıları 3'ün kuvveti olarak yazınız.

   a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{3}}$ c) $\frac{27}{\sqrt[4]{4}}$

3. $x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{3}{2}}\right)$ ifadesini en basit hâlde yazınız.

4. Aşağıdaki ifadeleri basitleştiriniz.

   a) $\frac{3^n+6^n}{3^n}$ b) $\frac{2^{m+2}-2^m}{2^m}$ c) $\frac{2^{m+3}-2^m}{32}$

5. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

   a) $4^x = 8$ b) $9^{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $5^{1-x} = \frac{1}{5}$ d) $4^{2x+1} = 8^{1-x}$

6. Aşağıdaki logaritmaları hesaplayınız.

   a) $log_3 27$ b) $log_5(0.2)$ c) $\log\sqrt[5]{100}$ d) $log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

7. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

   a) $log_3 24 + log_3 8$ b) $\frac{log8}{log4}$

8. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

   a) $log_3 27 + log_3\left(\frac{1}{3}\right) = log_3 x$ b) $log_x x = 1 + log_2 10$

   c) $ln(x^2-1) - ln(x+1) = 2lne$

9. Aşağıdaki ifadeleri daha basit olarak yazınız.

   a) $4ln2 + 2ln3$ b) $log_2 16 - 2log_2 3$ c) $ln\left(\frac{1}{e^x}\right)$

10. $log_9 x + log_{27} x = t$ olsun. $log_3 x + log_{81} x$ değerini t cinsinden bulunuz.

Özet

- Nüfus artışı, ekonomik büyüme hesapları, bileşik faiz hesapları gibi bir çok hesaplama türünde üstel fonksiyonlar karşımıza çıkar.
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$ (Üstel fonksiyon)

$$f(x) = \underset{\text{taban}}{a}^{\overset{\text{üs}}{x}}$$

- Doğal üstel fonksiyon olarak bilinen önemli bir üstel fonksiyon vardır. Bu fonksiyonda taban $e = 2.71828 \ldots$ sayısıdır. n sayısı arttıkça $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sayısının yaklaştığı değer e sayısıdır. Üstel fonksiyonda $e = 2.71828 \ldots$ (Euler sayısı) sayısı taban olarak alınırsa, $y = e^x$ fonksiyonunun matematikte önemi büyüktür. üstel fonksiyonun aşağıdaki özellikleri vardır
    - $a^0 = 1, \quad a \neq 0$
    - $a^1 = a$
    - $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
    - $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
    - $(a^x)^y = a^{xy}$
    - $a^x a^y = a^{x+y}$
    - $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
    - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
    - $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

- Logaritma fonksiyonu, üstel fonksiyonun ters fonksiyonudur.
- $y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y$
- $log_{10}x = logx$ (*Logaritmada taban 10 ise genellikle yazılmaz*)
- $log_e x = lnx$ (*e tabanında x in logaritması $\ln x$ olarak yazılır*)

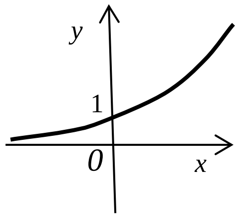
•Logaritmanın aşağıdaki özellikleri vardır:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a u^b = b \cdot \log_a u$
- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$
- $a^{\log_a x} = x$

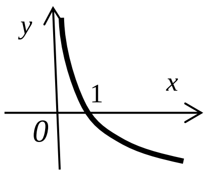
DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $f(x) = 3^x$ fonksiyonunun grafiği yukarıdaki seçeneklerden hangisidir?

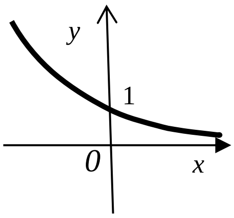
a)



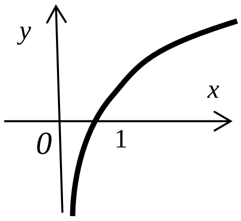
b)



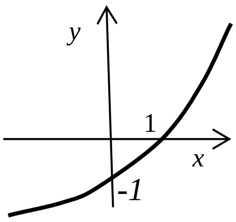
c)



d)

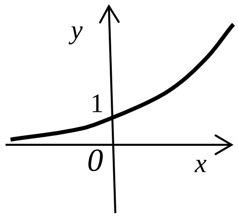


e)

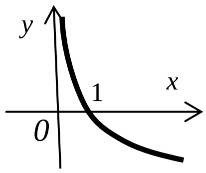


2. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ fonksiyonunun grafiği yukarıdaki seçeneklerden hangisidir?

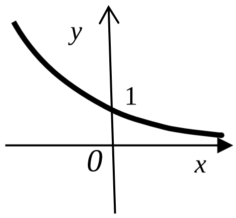
a)



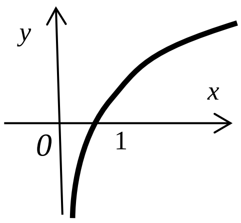
b)



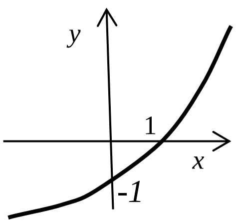
c)



d)

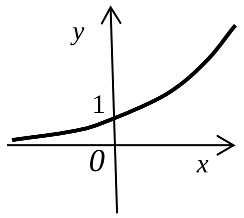


e)

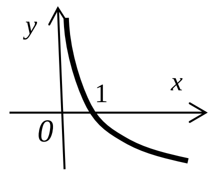


3. $f(x) = \log_3 x$ fonksiyonunun grafiği yukarıdaki seçeneklerden hangisidir?

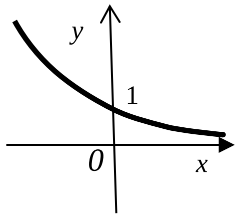
a)



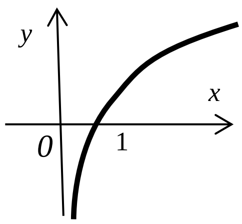
b)



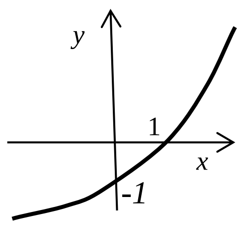
c)



d)

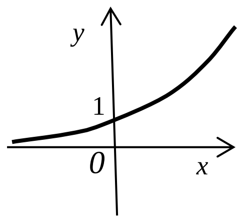


e)

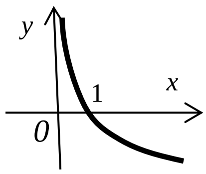


4. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiği yukarıdaki seçeneklerden hangisidir?

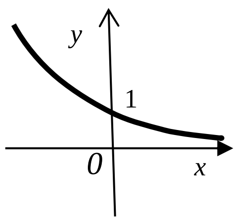
a)



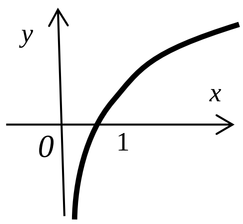
b)



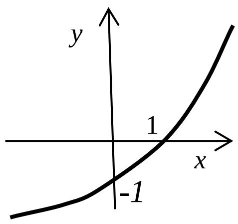
c)



d)



e)



5. Aşağıdakilerden hangisi $\dfrac{16^{2x+1}}{8^{2x+1}}$ ifadesinin sadeleşmiş hâlidir?

a) $2^{2x}+1$
b) $2 \cdot 4^{x}$
c) $(2x+1)^2$
d) 4^{2x+1}
e) $2^{2x}+2$

6. $6^{\sqrt{n^2-3n}} = 36$ eşitliğini sağlayan n değerleri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $n = -3, \;\; n = 6$
   b) $n = 2, \;\; n = 5$
   c) $n = 0, \;\; n = 1$
   d) $n = -2, \;\; n = 3$
   e) $n = -1, \;\; n = 4$

7. $f(x) = \frac{1}{logx-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R}^+$
   c) $(0\,,1) \cup (1\,,\infty)$
   d) $(0\,,10) \cup (10\,,\infty)$
   e) $(0\,,1)$

8. $\log_2(x-5) = 4$ denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 21
   b) 20
   c) 9
   d) 5
   e) 4

9. Aşağıdakilerden hangisi $log_2 x + log_2(4x)$ ifadesine eşittir?
   a) $\log_2 5x$
   b) $\log_4 5x$
   c) $2\log_2 x + 2$
   d) $\log_2 x + 1$
   e) $\log(5x)$

10. Aşağıdaki seçeneklerden hangisi $\log\frac{10}{5} - \log\frac{1}{5}$ değerine eşittir.

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) 5

Cevap Anahtarı

1.a, 2.c, 3.d, 4.b, 5.b, 6.e, 7.d, 8.a, 9.c, 10.c

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Balcı, M. (1999). *Matematik Analiz* (1. Cilt). Balcı Yayınları. ISBN: 975-6683-02-03. Ankara.

[2] George B. Thomas, Jr., (2010). Thomas Calculus 1. Çev. Korkmaz R., Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., ISBN: 978-605-377-213-2. İstanbul.

[3] Halilov, H. ve Hacısalihoğlu, H. H., (2006). *Meslek Yüksek Okulları ve Mühendislik Fakülteleri İçin Matematik.* Ertem Matbaa. ISBN: 975-8744-07-0. Ankara.

[4] Kadıoğlu, E. ve Kamali, M, (2009). *Genel Matematik*. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-975-8151-57-8. Erzurum.

[5] Sağel, M. K. ve Aktaş M., (2010), *Genel Matematik 1*. Pegem Akademi. ISBN: 978-605-364-062-2. Ankara.

[6] Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.,(2009) *Temel Matematiksel Analiz*. Çev. Demir S., Uzun Ö., Balce A. O., Çağlar A. Akademi Yayıncılık, ISBN:987-975-6885-21-5. Ankara.

[7] Cirrito F. (Editör), Bukle N., Dunbar I., (2009). *Mathematics Higer Level*. IBID Press. ISBN: 1 876659 11 4. Australia.

LİMİT VE SÜREKLİLİK

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
- Bir fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplayabilecek,
- İhtiyaç duyulduğunda sağdan veya soldan limit alabilecek,
- Bir fonksiyonun limiti ile o noktadaki değerini karşılaştırabilecek,
- Bir fonksiyonun sürekli olup olmadığına karar verebileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Sezgin AKBULUT

ÜNİTE

10

Limit Kavramı ve Tanımı

- ***Sezgisel Olarak Limit Kavramı***
- ***Limitin Tanımı***

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

Limitin Özellikleri

- ***Limitin Özellikleri***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Tek Yönlü Limit

- ***Sağdan Limit***
- ***Soldan Limit***

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Süreklilik

- ***Fonksiyonun sürekliliği***

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f \text{ fonksiyonu } x = a \text{ da süreklidir}$$

GİRİŞ

Matematiğin temel konularından biri olan limit birçok kavrama anlam kazandırır. Örneğin uygulamalı bilimlerde çok yaygın olarak kullanılan türev ve integral konuları limit kavramı üzerine inşa edilmiştir. Limitle yakından ilgili olan bir başka kavram da süreklilikdir.

Bu ünitede, limit ve süreklilik kavramlarını inceleyeceğiz. Matematikçileri ilgilendiren teorik yaklaşımları bir kenara bırakıp sezgisel yaklaşımlara ağırlık vereceğiz. Tanım ve temel özellikleri örneklerle açıklayacağız.

LİMİT

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. A kümesine ait bir a elamanının f altındaki görüntüsünün $f(a)$ olduğunu biliyoruz. Ancak a noktasının çok yakınında bulunan noktalarda fonksiyonun davranışı hakkında hiçbir bilgiye sahip değiliz. Bu bilgiyi elde etmek için fonksiyonun, a noktasının çok yakınında bulunan noktalarda ki davranışını incelemek gerekir. Yani x, a' ya yeterince yaklaştığında $f(x)$'in aldığı değerlerin belli bir sayıya yeterince yaklaşıp yaklaşmayacağı, eğer yaklaşıyorsa hangi sayıya yaklaşacağını araştıracağız. x'in bir a sayısına yaklaşmasını $x \to a$ sembolü ile $f(x)$'in bir L sayısına yaklaşmasını da $f(x) \to L$ sembolü ile göstereceğiz. Eğer x değişkeni a sayısına a'dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma denir ve $x \to a^-$ şeklinde gösterilir. Eğer x değişkeni a sayısına a'dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya da sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ şeklinde gösterilir. Konunun daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek

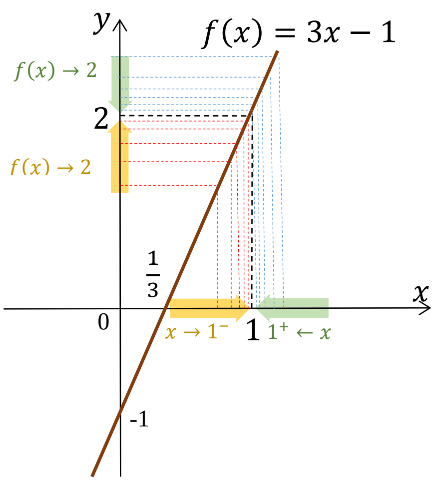
• $f(x) = 3x - 1$ fonsiyonu verilsin. x değişkeni 1 sayısına yaklaştığında $f(x)$ in hangi değere yaklaştığını araştırınız.

Çözüm:

Tablo 10.1

$x < 1$	$f(x) = 3x - 1$	$x > 1$	$f(x) = 3x - 1$
0	-1	2	5
0,5	0,5	1,5	3,5
0,8	1,4	1,2	2,6
0,9	1,7	1,1	2,3
0,99	1,97	1,01	2,03
0,999	1,997	1,001	2,003
0,9999	1,9997	1,0001	2,0003
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2

Tablo 10.1 dikkatlice incelendiğinde $x \to 1^-$ için $f(x)$ değerlerinin büyüyerek 2 sayısına, $x \to 1^+$ için $f(x)$ değerlerinin küçülerek 2 sayısına yaklaştığı görülür. Yani $x \to 1$ için $f(x) \to 2$ olur. Bu yaklaşımı Şekil 10.1'de görebiliriz.



Şekil 10.1

Fonksiyonun grafiğine dikkat edilirse, x değişkeni 1 sayısına hangi yönden yaklaşırsa yaklaşsın fonksiyonun aldığı değerler hep aynı sayıya yaklaşmaktadır.

Bireysel Etkinlik

- x'in her seçimi için $f(x)$ değerleri aynı sayıya yaklaşır mı? Sizde yukarıdaki örneği göz önüne alarak x in farklı seçimleri için $f(x)$' in hangi sayıya yaklaştığını bulunuz?

Bu durumu aşağıdaki gibi açıklayabiliriz.

Tanım 10.1.

Tanıma dikkat edilirse a noktasının tanım kümesine ait olması gerekmez. a noktasının tanım kümesine ait olması durumunda $f(x)$'in yaklaştığı değer $f(a)$ olmayabilir.

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$, A kümesinin elemanları ile istenildiği kadar yaklaşılabilen bir nokta olsun. $L \in \mathbb{R}$, $x \in \mathrm{A}$ ve $x \neq a$ olmak üzere x değişkeni a ya yaklaşırken $f(x)$ değerleri de belli bir L sayısına yaklaşıyorsa bu L sayısına $f(x)$ fonksiyonunun a noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x\to a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir. Eğer x değişkeni a ya farklı yönlerden yaklaştığında $f(x)$ değerleri de farklı sayılara yaklaşıyorsa $f(x)$ fonksiyonunun a noktasında limiti yoktur denir.

Tanımla ilgili örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek

• $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

• *fonksiyonu verilsin.* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *limitini araştırınız.*

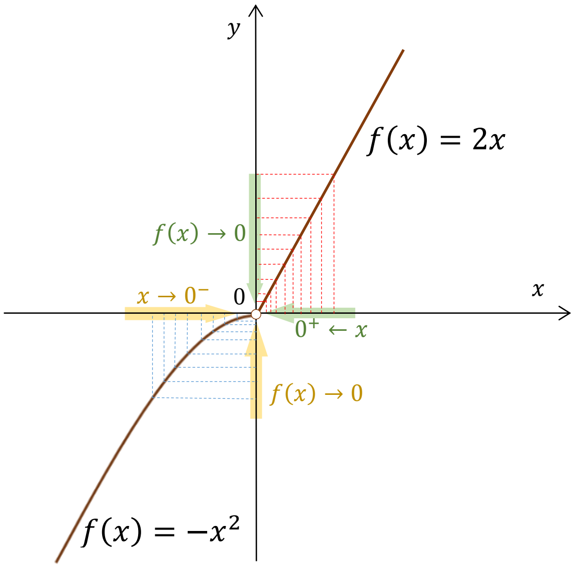
Çözüm:

Tablo 10.2

$x < 0$	$f(x) = -x^2$	$x > 0$	$f(x) = 2x$
-1	-1	1	2
$-0{,}5$	$-0{,}25$	$0{,}5$	1
$-0{,}2$	$-0{,}04$	$0{,}2$	$0{,}4$
$-0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}1$	$0{,}2$
$-0{,}01$	$-0{,}0001$	$0{,}01$	$0{,}02$
$-0{,}001$	$-0{,}000001$	$0{,}001$	$0{,}002$
$-0{,}0001$	$-0{,}00000001$	$0{,}0001$	$0{,}0002$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	0	0	0

Tablo 10.2 incelendiğinde $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olduğu görülür. Bu örnekte görüldüğü gibi fonksiyonun bir noktadaki limiti araştırılırken fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerekmez. *Dikkat edilirse fonksiyon* $x = 0$ *da tanımlı değildir. Ancak bu noktada limiti vardır.* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olduğunu Şekil 10.2'deki grafik üzerinde de görebiliriz.

Fonksiyonun $x = 0$ noktasında tanımlı olmadığına dikkat ediniz.



Şekil 10.2

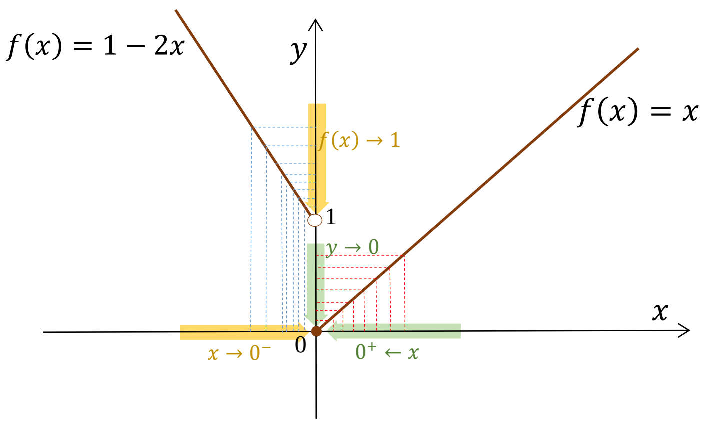
$x \to 0^-$ ve $x \to 0^+$ için $f(x)$'in farklı sayılara yaklaşması limitin olmadığı anlamına gelir.

Örnek

•$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < 0 \\ x \quad , & x \geq 0 \end{cases}$

•*fonksiyonu verilsin.* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *limitini araştırınız.*

Çözüm:



Şekil 10.3

Şekil 10.3'e dikkat edilirse, $x \to 0^-$ için $f(x) \to 1$ ve $x \to 0^+$ için $f(x) \to 0$ dır. Bu sebeple $\lim_{x \to 0} f(x)$ limiti yoktur.

Şimdiye kadar limit kavramını sezgisel olarak açıklamaya çalıştık. Ancak bu yöntem çok kullanışlı bir yöntem değildir. Çünkü, verilen fonksiyonun bir a noktasında limitinin var olduğunu göstermek için x değişkeni a sayısına hangi yönden yaklaşırsa yaklaşsın fonksiyon değerlerinin aynı sayıya yaklaştığını göstermek gerekir. Bu ise çok kolay değildir. Fakat aşağıda ispatsız olarak vereceğimiz özellikler limit almamızı oldukça kolaylaştıracaktır.

LİMİT ÖZELLİKLERİ

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ ve $g: A \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve a, A kümesinin elemanları ile istenildiği kadar yaklaşılabilen bir nokta olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler mevcuttur.

Bir sabitin limiti kendisidir.

1. Özellik:

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = c$ ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

dir. *Yani sabit fonksiyonun herhangi bir noktada limiti vardır ve bu limit fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.*

Örnek

• $\lim\limits_{x \to -1} 5$ *ve* $\lim\limits_{x \to 1} 4$ *limitlerini hesaplayınız.*

Çözüm: $f(x) = 5$ ve $f(x) = 4$ fonksiyonları sabit olduğundan yukarıdaki özelliğe göre bu fonksiyonların limitleri, sırasıyla $\lim\limits_{x \to -1} 5 = 5$ ve $\lim\limits_{x \to 1} 4 = 4$ olur.

2. Özellik:

$f(x) = x$ ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

olur.

Örnek

• $\lim\limits_{x \to 3} x$ *ve* $\lim\limits_{x \to 0} x$ *limitlerini hesaplayınız.*

Çözüm: 2. Özelliğe göre, $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$ ve $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ dır.

3. Özellik:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ ise

$\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$ dir.

Örnek

•$\lim_{x\to 1}(x+3)$ *limitini hesaplayınız.*

Çözüm: $f(x)=x$ *ve* $g(x)=3$ olarak alınırsa $f(x)+g(x)=x+3$ olur.

$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x=1$ ve $\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1} 3=3$ dir. O hâlde 3. özelliğe göre

$\lim_{x\to 1}(x+3)=\lim_{x\to 1} x+\lim_{x\to 1} 3=1+3=4$ bulunur.

Bu özellik sonlu tane fonksiyon için de doğrudur. Yani $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ *fonksiyonlarının a noktasında limitleri var ve bu limitler sırasıyla* $L_1, L_2, \dots, L_n$ *ise*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)] &= \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_2(x)\\ &= L_1+L_2+\cdots+L_n\end{aligned}$$

dir.

Toplanan fonksiyonların ayrı ayrı limitleri varsa toplamın limiti limitleri toplamına eşittir.

4. Özellik:

$\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ ve $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ ise

$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=L_1L_2$'dir.

Bu özellik sonlu tane fonksiyonun çarpımının limiti için de doğrudur. Yani $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ *fonksiyonlarının a noktasında limitleri var ve bu limitler sırasıyla* $L_1, L_2, \dots, L_n$ *ise*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f_1(x).f_2(x).\dots.f_n(x)] &= \lim_{x\to a} f_1(x).\lim_{x\to a} f_2(x).\dots.\lim_{x\to a} f_2(x)\\ &= L_1.L_2.\dots.L_n\end{aligned}$$

Çarpım fonksiyonlarının ayrı ayrı limitleri varsa çarpımın limiti limitleri çarpımına eşittir.

dir. Yine bu özellikde $g(x)=c$ *alınırsa* $\lim_{x\to a}[cf(x)]=\lim_{x\to a} c.\lim_{x\to a} f(x)=c.\lim_{x\to a} f(x)$ *olur.* Yani bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımına eşittir. 3. ve 4. özellikler göz önüne alınırsa,

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

yazılabilir.

Örnek

•$n\in\mathbb{N}$ *olmak üzere* $\lim_{x\to a} x^n$ *limitini hesaplayınız.*

Çözüm: İkinci özellilkten $\lim_{x\to a} x=a$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\lim_{x\to a} x^n=\lim_{x\to a}(x.x.\dots.x)=\lim_{x\to a} x.\lim_{x\to a} x.\dots.\lim_{x\to a} x=a.a.\dots.a=a^n$$

olur. Yani, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$'dir.

Örnek

•*$n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonu verilsin. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limitini hesaplayınız.*

Polinom fonksiyonların bir noktadaki limiti o noktadaki değerine eşittir.

Çözüm: Yukarıdaki özellikler ve bir önceki örnek göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} [a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] \\
&= \lim_{x\to x_0} a_n x^n + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_1 x + \lim_{x\to x_0} a_0 \\
&= a_n \lim_{x\to x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x\to x_0} x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + \lim_{x\to x_0} a \\
&= a_n {x_0}^n + a_{n-1}{x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise fonksiyonun x_0 noktasındaki değeri olan $f(x_0)$ dır. Yani $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Örnek

•*$\lim\limits_{x\to 2}(x^3 - 2x^2 + x + 1)$ limitini hesaplayınız.*

Çözüm: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ polinom fonksiyon olduğundan limiti $f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$ değerine eşittir. Yani,

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 2x^2 + x + 1) = 3$$

olur.

5. Özellik:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, $g(x) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

dir.

Örnek

•*$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+7}{x^2+1}$ limitini hesaplayınız.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}(x+7)=8$ ve $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$ olup

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+7}{x^2+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)}=\frac{8}{2}=4$$

bulunur.

Pay ve paydadaki fonksiyonların limitlerinin mevcut olması ve paydanın limitinin sıfırdan farklı olması hâlinde bölümün limiti limitleri bölümüne eşittir.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ *limitini hesaplayınız.*

Örneğin çözümüne geçmeden $\frac{0}{0}$ *ve* $\frac{\infty}{\infty}$ *ifadelerine belirsiz hâller denildiğini hatırlatmak isterim.* Belirsiz hâllerle karşılaştığımızda limitin varlığı veya yokluğu hakkında bir fikir yürütemeyiz. Eğer limit hesabında belirsizilik ile karşılaşılırsa önce belirsizlik giderilmeli sonra limit hesabına geçilmelidir.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$ ve $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$ olduğundan $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Bu sebeple 5. özelliği doğrudan uygulayamayız. Önce bu belirsizliği gidermeliyiz. Bunun için pay ve paydayı çarpanlarına ayırmak akla gelen ilk yoldur. Buna göre $x\neq 3$ için

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$$

olup

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

bulunur.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ *limitini hesaplayınız.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}-2\right)=0$ ve $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ olup $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği gidermek için öncelikle pay ve payda köklü ifadenin eşleniği ile çarpılır.

Yani, $x\neq 2$ için

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

olup

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

bulunur.

6. Özellik:

Limitin kök içerisine alınabildiğine dikkat ediniz.

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

olur. Burada eğer $n\in\mathbb{N}$ çift sayı ise $\lim_{x\to a} f(x)=L\geq 0$ olmalıdır.

Örnek

•*$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+4x+3}$ limitini hesaplayınız.*

Çözüm: $\lim_{x\to 0}(x^3+4x+3)=3$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+4x+3}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(x^3+4x+3)}=\sqrt{3}$$

olur.

TEK YÖNLÜ LİMİTLER

Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun bir a noktasındaki limiti incelenirken, x değişkeni a noktasına nasıl yaklaşırsa yaklaşsın $f(x)$ değerlerinin belli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını araştırdık. Bazı durumlarda x değişkeninin a ya sadece sağdan veya sadece soldan yaklaşması zorunlu olabilir. İşte bu durumda tek yanlı limit söz konusu olur.

$x\to a^+$ için $f(x)$ fonksiyonunun L_1 gibi bir limiti varsa, bu limite $f(x)$'in a noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$ şeklinde gösterilir.

Eğer $x\to a^-$ için $f(x)$ fonksiyonunun L_2 gibi bir limiti varsa, bu limite $f(x)$'in a noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$ şeklinde gösterilir.

Bir fonksiyonun limiti ile sağdan ve soldan limitleri arasında

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

şeklinde bir irtibat vardır. *Yani, bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa o noktadaki sağdan ve soldan limitleri var ve birbirine eşittir. Tersine sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşit ise o noktada limit vardır. Eğer sağdan ve soldan limitlerden en az biri yoksa veya bu iki limit birbirine eşit değilse bahsedilen noktada limit yoktur.*

Mutlak değer, tam değer fonksiyonlarının kritik noktalarındaki limitleri araştırılırken sağdan ve soldan limitlere bakılır.

Örnek

•*$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ limitinin olup olmadığını araştırınız.*

Çözüm: $|x| = \begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$ olduğunu biliyoruz. $x\to 0^-$ için $x<0$ olduğundan $|x| = -x$ olur. Buradan

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$$

ve

$x\to 0^+$ için $x>0$ olduğundan $|x| = x$ olur. Buradan da

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+}1 = 1$$

bulunur. Görüldüğü gibi sağdan ve soldan limitler birbirinden farklıdır. Yani $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ limiti yoktur.

Parçalı fonksiyonların kritik noktalarındaki limitleri araştırılırken sağdan ve soldan limitlere bakılır.

Örnek

•$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<1 \\ 3x^2-2, & x>1 \end{cases}$

•*olmak üzere $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ limitini hesaplayınız.*

Çözüm: Önce fonksiyonun $x=1$ deki soldan ve sağdan limitlerini bulalım. $x<1$ için $f(x) = 2x-1$ olduğundan

$$\lim_{x\to 1^-}f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x-1) = f(1) = 1$$

ve

$x>1$ için $f(x) = 3x^2-2$ olduğundan

$$\lim_{x\to 1^+}f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x^2-2) = f(x) = 1$$

olur. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan $\lim\limits_{x\to 1}f(x) = 1$'dir.

Bazı durumlarda değişken belli bir sayıya yaklaştığında, fonksiyon değerleri sınırsız olarak büyüyerek her pozitif sayıdan daha büyük olabilir veya sınırsız olarak küçülerek her negatif sayıdan daha küçük olabilir. Böyle durumlarda fonksiyon değerleri belli bir sayıya yaklaşmadığından limit yoktur denilir. Bu durumu karakterize etmek için,

$$\lim_{x\to a}f(x) = \infty \text{ ve } \lim_{x\to a}f(x) = -\infty$$

tek yönlü limitler içinde

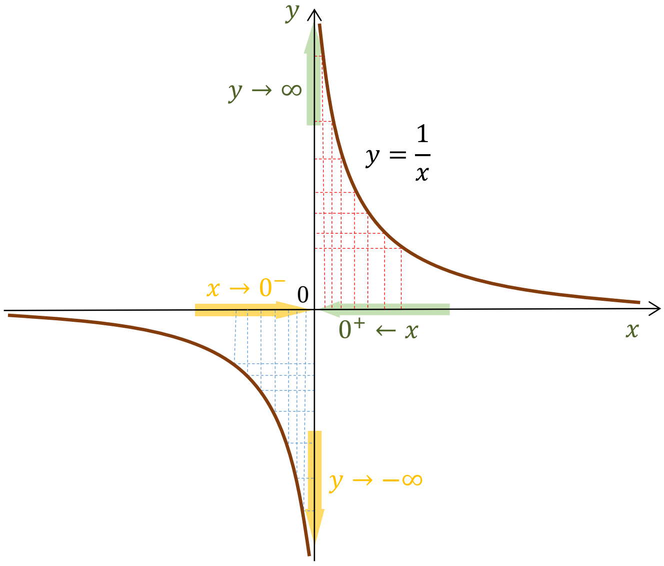
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ ve } \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

gösterimleri kullanılır. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek

- *$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ limitini bulunuz.*

Çözüm:



Şekil 10.4

Şekil 10.4'e dikkat edilirse $a = 0$ noktasına soldan yaklaşıldığında fonksiyon değerleri sınırsız olarak küçülmekte ve sağdan yaklaşıldığında fonksiyon değerleri sınırsız olarak büyümektedir. Bu nedenle

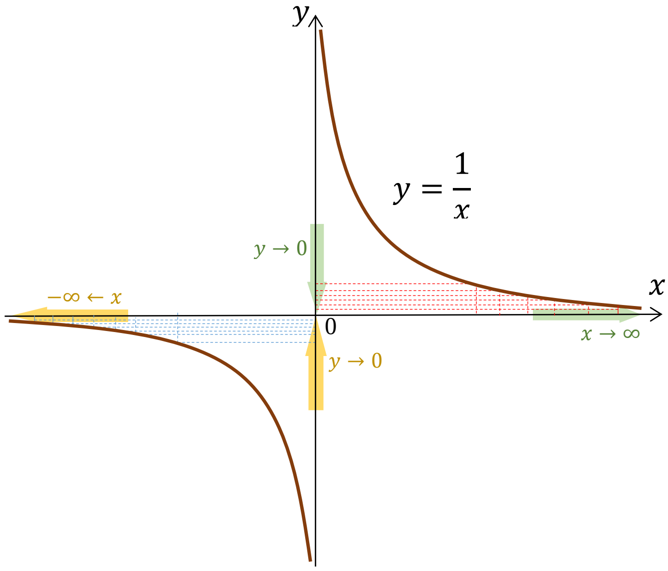
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ ve } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ olur. Yani } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ limit yoktur.}$$

Bazı durumlarda da x değişkeni sınırsız büyüyebilir($x \to \infty$) veya sınırsız küçülebilir($x \to -\infty$). Böyle durumlarda fonksiyonun limitinden bahsedebiliriz. Eğer $x \to \infty$ (veya $x \to -\infty$) için $f(x)$ değerleri belli bir L sayısına yaklaşıyorsa bu durumda $x \to \infty$ (veya $x \to -\infty$) için fonksiyonun limiti L dir denir ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, (veya $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ *ve* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ *limitlerini hesaplayınız.*

Çözüm:



Şekil 10.5

Şekil 10.5 e dikkat edilirse hem $x\to-\infty$ için hemde $x\to\infty$ için fonksiyon değerleri 0 a yaklaşmaktadır.

Yani, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$'dır.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+1}{x^3+x+7}$ *limitini hesaplayınız.*

Çözüm: Limitini aldığımız fonksiyonun hem payı hemde paydası x^3 parantezine alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+1}{x^3+x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}=\frac{4+0}{1+0+0}=4$$

bulunur.

$g(x)$ n. dereceden ve $h(x)$ de m. dereceden iki polinom fonksiyon olmak üzere

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

ise

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$= \begin{cases} \mp\infty, & n > m \text{ ise} \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \text{ ise} \\ 0, & n < m \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir. Bunu göz önüne alarak aşağıdaki örnekleri çözelim:

$x \to \infty$ için limit alınırken, payın derecesi paydanın derecesinden büyükse limit $\pm\infty$, payın derecesi küçük ise limit sıfır, pay ve paydanın dereceleri eşit ise limit en yüksek dereceli terimlerin katsayıları oranıdır.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-2x+5}{x^2+7}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2+1}{2x^2+3x+5}$ *ve* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x+1}{x^3+x+3}$
- *limitlerini hesaplayınız.*

Çözüm: Bu limitlerin çözümünde pay ve paydadaki polinom fonksiyonların dereceleri göz önüne alınacaktır.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-2x+5}{x^2+7} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2+1}{2x^2+3x+5} = \frac{6}{2} = 3$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x+1}{x^3+x+3} = 0$

dır.

Bireysel Etkinlik

- Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile o noktadaki değeri arasında nasıl bir irtibat vardır? Örneklerle inceleyiniz. Bu değerlerin bir birine eşit olması durumunu nasıl açıklarsınız?

SÜREKLİLİK

Limit konusu verildiğinde, bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile o noktadaki değeri arasında doğrudan bir ilişkinin olmadığını söylemiştik. Ancak bazı durumlarda da limit ile o noktadaki değerinin aynı olduğunu görmüştük. Bu özel durum fonksiyonun o noktadaki davranışını incelemede önemli bir özellik olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tanım 10.2.

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir denir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise, $f(x)$'e A kümesinde süreklidir denir. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli değilse $f(x)$'e $x = a$ da süreksizdir denir.

Bu tanımdan şu sonucu çıkarabiliriz. $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bir $a \in A$ noktasında sürekli olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerekir.

- $f(x)$ fonksiyonu a noktasında tanımlı,
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut,
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

olmalıdır. Eğer bu şartlardan en az biri sağlanmazsa $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreksiz olur.

Örnek

•$f(x) = x^2 + 3x + 2$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x + 2) = 6 = f(1)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ de süreklidir.

Polinom fonksiyonların tüm reel sayılarda sürekli olduğuna dikkat ediniz.

$x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0) = f(x_0)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre polinom fonksiyonlar her $x_0 \in \mathbb{R}$ için süreklidir. Yani polinom fonksiyonlar $\mathbb{R}$ de süreklidir.

Örnek

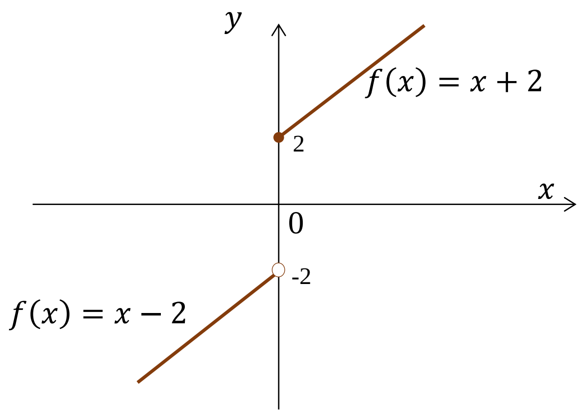
•$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$

•şeklinde verilen fonksiyonun $x = 0$ ve $x = 3$ noktalarında sürekli olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-2) = -2$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+2) = 2$ bulunur. Sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limiti yoktur. Dolayısıyla verilen fonksiyon $x = 0$ noktasında süreksizdir. Fakat bu fonksiyon $x = 3$ noktasında süreklidir. Çünkü, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+2) = 5 = f(3)$ olur.

Eğer fonksiyonun grafiği biliniyorsa bu grafiğe bakarak fonksiyonun hangi noktalarda sürekli hangi noktalarda süreksiz olduğunu söyleyebiliriz. Eğer fonksiyon bir aralıkta sürekli ise, verilen aralıkta fonksiyonun grafiğini elimizi kaldırmadan çizebiliriz. Fonksiyonun grafiğinde bir kopma söz konusu ise fonksiyon o noktada süreksizdir.

Eğer fonksiyon bir aralıkta sürekli ise, o aralıkta fonksiyonun grafiğini elimizi kaldırmadan çizebiliriz. Fonksiyonun grafiğinde bir kopma söz konusu ise fonksiyon o noktada süreksizdir.



Şekil 10.6

Şekil 10.6 daki grafiğe dikkat edilirse $x = 0$ da bir kopmanın olduğu görülür. Bu ise fonksiyonun $x = 0$ da süreksiz olduğunu gösterir. $x = 3$ noktasında böyle bir kopukluk olmadığından fonksiyon bu noktada süreklidir.

Örnek

•$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ 3 \;\;, & x=1 \\ x^2+1, & x>1 \end{cases}$

•*fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli midir?*

Çözüm: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ ve $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+1) = 2$ olur. Buna göre $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ dir. Ancak $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 3 = f(1)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli değildir.

Özet

- $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $x\ (x \neq a)$ değişkeni bir a sayısına yeterince yaklaştığında $f(x)$ değerlerinin belli bir L sayısına yaklaşıp yaklaşmadığı önemlidir. x değişkeni a sayısına farklı yönlerden yaklaştırılabilir. Bu yaklaşım hangi yönden olursa olsun $f(x)$ değerleri belli bir L sayısına yaklaşıyorsa bu L sayısına, $f(x)$ in a noktasındaki limiti denilir. Bu limiti öncelikle sezgisel olarak vermeye çalıştık. Ancak görüldü ki bu yöntem çok kullanışlı değildir. Bu sebeple ispatsız olarak limit özellikleri verildi. Bazı durumlarda zorunlu olarak tek yönlü limit almak gerekebilir. Ancak bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
- olur. Yani, fonksiyonun bir noktada limiti varsa, o noktadaki sağdan ve soldan limitleri vardır ve birbirine eşittir. Tersine sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşit ise o noktada limit vardır. Eğer bir fonksiyonun bir noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki değerine eşitse, yani
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- ise bu durumda $f(x)$ fonksiyonuna a da süreklidir denir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\lim\limits_{x\to 0}(x^3 + 2x^2 + 3x - 2)$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) -2
   b) 0
   c) 1
   d) 2
   e) 3

2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3+x}{2x+1}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 0
   b) $\frac{2}{3}$
   c) Yok
   d) 1
   e) $\frac{3}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-2}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $-\infty$
   b) -2
   c) 2
   d) Yok
   e) ∞

4. $f(x) = \begin{cases} 5x, & x < 1 \\ 3x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ değeri nedir?
   a) -5
   b) 0
   c) Yok
   d) 3
   e) 5

5. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) -2
   b) $-\frac{1}{2}$
   c) $\frac{1}{2}$
   d) 2
   e) ∞

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x-2}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) -2
   b) 0
   c) $\frac{1}{2}$
   d) 1
   e) 2

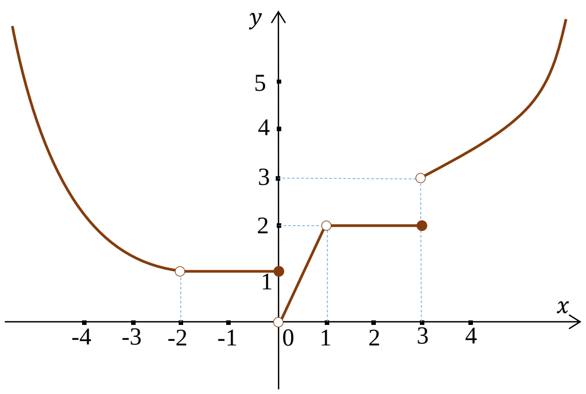
7. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $-\infty$
   b) -1
   c) 0
   d) 1
   e) ∞

8. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasında sürekli olduğu bilindiğine göre $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ limiti nedir?
   a) -4
   b) -3
   c) -2
   d) -1
   e) 0

9. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ ax - 1, & x < 1 \end{cases}$

   fonksiyonunun $x = 1$ de sürekli olması için a ne olmalıdır?
   a) 3
   b) 2
   c) 1
   d) 0
   e) -1

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir. 10.- 15. soruları bu grafiğe göre cevaplayınız.



10. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ limiti aşağıdakilerden hangisidir?
    a) -1
    b) 0
    c) 2
    d) 3
    e) Yok

11. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ limiti aşağıdakilerden hangisidir?
    a) 0
    b) 2
    c) 3
    d) 4
    e) Yok

12. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ limiti aşağıdakilerden hangisidir?
    a) -1
    b) 0
    c) 1
    d) 2
    e) Yok

13. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ limiti aşağıdakilerden hangisidir?
    a) -2
    b) -1
    c) 0
    d) 1
    e) Yok

14. $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıda verilen hangi kümede süreklidir?
    a) $\{0,2,4\}$
    b) $\{-3,-1,2\}$
    c) $\{1,2,3\}$
    d) $\{0,1,2\}$
    e) $\{-1,2,3\}$

15. $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıda verilen hangi kümede <u>süreksizdir</u>?
    a) $\{-1,0,1\}$
    b) $\{-3,-1\}$
    c) $\{0,1,4\}$
    d) $\{0,1,3\}$
    e) $\{-1,2,3\}$

Cevap Anahtarı

1.a, 2.d, 3.c, 4.e, 5.c, 6.e, 7.b, 8.a, 9.a, 10.c, 11.e, 12.b, 13.d, 14.b, 15.d

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Kadıoğlu, E. ve Kamali M., (2015). *Genel Matematik* Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-605-86149-56. *9. Baskı.* Eylül-2015. Erzurum.

[2} Bayraktar, M., (2007). *Analize Giriş I.* Grafiker Yayıncılık, 1. Cadde 33. Sokak No:6, 06520 Balgat Ankara, Yayın No: 32. ISBN: 978-975-6355-34-3. 2. Baskı. Ankara.

[3] Balcı, M., (2008). Matematik Analiz. Balcı Yayınları. Mithat Paşa Cad. 43/8, Kızılay Ankara. ISBN: 978-9756683-02-6. 7. Baskı Ankara

[4] Barnett, M. A., Ziegler, M.R. ve Byleen, K.E. (2011). İşletme, İktisat ve Sosyal Bilimler için Genel Matematik, 12. Baskıdan Çeviri, Çeviri Editörü A. SABUNCUOĞLU, Nobel Yayıncılık. İstanbul.

TÜREV

İÇİNDEKİLER

- Türevin Tanımı
- Türev Alma Kuralları
- Yüksek Mertebeden Türev

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Türevin anlamını öğrenecek,
  - Fonksiyonların türevini hesaplayabilecek,
  - Türevin uygulamalarını yapabilecek,
  - Yüksek mertebeden türev alabileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Sezgin AKBULUT

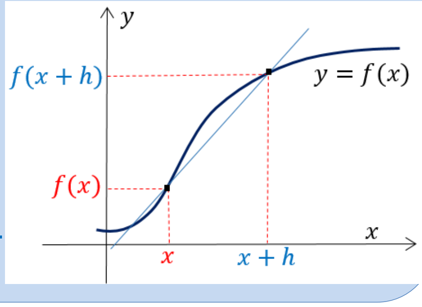
ÜNİTE

11

Türev Kavramı ve Tanımı

- ***Türevin Tanımı***
- ***Sağdan ve Soldan Türev***

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Türev Alma Kuralları

- ***Polinom Fonksiyonun Türevi***
- ***Fonksiyonların Toplamının Türevi***
- ***Fonksiyonların Çarpımının Türevi***
- ***Zincir Kuralı***

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Türevleri

$$\mathbf{y = a^u \Rightarrow y' = u'a^u \ln a}$$

- ***Üstel Fonksiyonun Türevi***
- ***Logaritmik Fonksiyonun Türevi***

$$\mathbf{y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

- ***Yüksek Mertebeden Türevler***

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

GİRİŞ

Bu bölümde matematiğin temel konularından biri olan türev kavramı tanıtılarak türev alma kuralları verilecektir.

Türev, sadece matematikte değil; fizik, kimya, ekonomi, istatistik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde de birçok problemin çözümünü kolaylaştıran önemli bir kavramdır.

Önce türevin fiziksel olarak ne anlama geldiğini açıklayalım. Bir araç sabit bir hızla ilerliyorsa, aldığı yolun "$S = hız$ x $zaman$" olduğunu biliyoruz. Eğer aracın hızı sabit değilse o zaman aracın ortalama hızından bahsedilebilir. Örneğin bir araç 300 kilometrelik yolu 3 saatte gitmişse ortalama hızı $\frac{300}{3} = 100\ km/saat$tir.

Aracın t_1 anında aldığı yolun S_1 ve t_2 anında aldığı yolunda S_2 olduğu düşünülürse $t_1 < t_2$ olmak üzere $[t_1, t_2]$ zaman aralığında aracın ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

olur.

Şimdi de bir doğru boyunca hareket eden bir cisim düşünelim. Bu cismin t_0 anında bulunduğu konum $s(t_0)$ ve $t_0 + h$ anındaki konumu da $s(t_0 + h)$ olsun. O hâlde bu cismin ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

olur. h küçüldükçe ortalama hız t_0 anındaki hıza yaklaşacaktır. Bu sebeple h→ 0 için ortalama hız, limitin mevcut olması hâlinde t_0 anındaki hızı verir. Yani

$$v = \lim_{h \to 0} V_{ort} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

dir. Bu limit değerine cismin t_0 anındaki hızı denir. Anlık hız, ekonomide marjinal maliyet ve marjinal gelir gibi anlamlar taşır. Matematikte ise bunun adı türevdir.

Tanım 11.1

Türevin açık küme üzerinde tanımlandığına dikkat ediniz.

f, (a, b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa, bu limit değerine f'nin x_0 noktasındaki türevi denir ve

$$f'(x_0) \text{ veya } \frac{df(x_0)}{dx},$$

sembollerinden biri ile gösterilir. Eğer $f'(x_0)$ varsa

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olur. Burada $x = x_0 + h$ alınırsa

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

şeklinde de yazılabilir. h yerine Δx yazılırsa

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

olur.

Örnek

•*$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki türevini bulunuz.*

Çözüm: Türevin tanımından

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1 - (1-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2 + h)$$

$$= 2$$

olur.

Örnek

•*$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.*

Çarpanlara ayırma konusunu gözden geçiriniz.

Çözüm: Tanımdan

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$$

olur. Pay ve payda payın eşleniği olan $\sqrt{x} - \sqrt{2}$ ifadesi ile çarpılırsa;

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

sonucu elde edilir.

Sağdan ve Soldan Türevler

$\boldsymbol{y = f(x)}$ fonksiyonu verilsin.

$$\lim_{x\to x_0^{+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa bu limit değerine f nin x_0 noktasındaki sağdan türevi denir ve $f'_{+}(x_0)$ ile gösterilir. Yani

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{x\to x_0^{+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

dır. Benzer şekilde

$$\lim_{x\to x_0^{-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limiti varsa bu limit değerine f nin x_0 noktasındaki soldan türevi denir ve $f'_{-}(x_0)$ ile gösterilir. Yani

Fonksiyonların kritik noktalarında türevi alınırken sağdan ve soldan türev alındığına dikkat ediniz.

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{x\to x_0^{-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

dır.

Not: $f'(x_0)$ türevinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0)$ olmasıdır.

Örnek

• *$f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki türevinin olup olmadığını araştırınız.*

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasının sağında ve solunda farklı davranış gösterdiğine dikkat ediniz.

Çözüm: $x_0 = 0$ noktası fonksiyonun kritik noktası olduğu için $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında sağdan ve soldan türevlerinin var ve eşit olup olmadığına bakacağız.

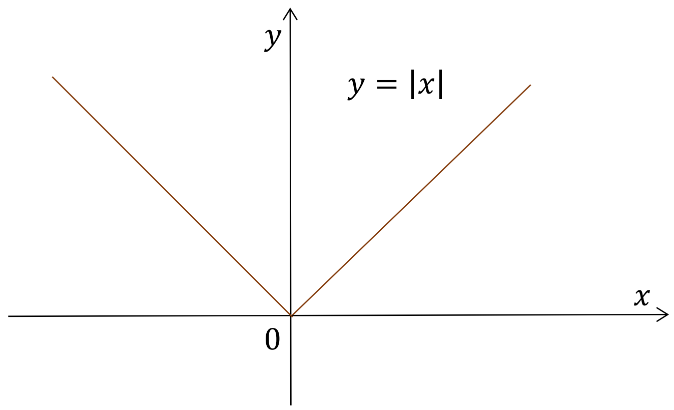
$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{x}{x} = 1$$

ve

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^{-}} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{-x}{x} = -1$$

bulunur. $f'_{+}(x_0) = 1 \neq -1 = f'_{-}(x_0)$ olduğundan $f'(0)$ türevi yoktur.

Fonksiyonun grafiğinde $x = 0$ noktasının köşe noktası olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 11.1

Şekil 11.1'de $f(x) = |x|$ fonksiyonun grafiğine dikkat edilirse $x = 0$ noktasında bir köşe noktası oluşmuştur. *Fonksiyonun grafiğinde böyle keskin dönüş yapılmış (köşeli) noktalar varsa bu noktalarda türev yoktur.*

$f(x)$ fonksiyonu, bir x_0 noktasında türevlenebilirse bu noktada süreklidir. Ancak fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevinin olması gerekmez. Dikkat edilirse $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında sürekli olmasına rağmen bu noktada türevi yoktur.

$y = f(x)$ fonksiyonunun verilen bir noktadaki türevi yukarıda tanımlandı. Şimdi de $y = f(x)$' in türev fonksiyonunu tanımlayalım. $f(x)$ in türevlenebildiği her x noktası için

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

veya

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

şeklinde yazılır. $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi y' , $f'(x)$ ve $\frac{dy}{dx}$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Örnek

•*$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: Türev tanımı uygulanırsa,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 1 - x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h)$$

$$= 2x$$

Türev fonksiyonunda $x = 1$ alınırsa $f'(1) = 2$ bulunur. Bunun önceki sonuçla aynı olduğuna dikkat ediniz.

Bir fonksiyonun belli bir noktadaki türevini bulmak için türev fonksiyonunda o değeri yerine yazmak yeterlidir.

Örnek

•*$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: Tanımdan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Burada $f'(1) = \frac{1}{2}$ olduğuna dikkat ediniz.

TÜREV ALMA KURALLARI

Şimdiye kadar bir fonksiyonun türevini bulurken türevin tanımını kullandık. Ancak bu, her zaman çok kolay olmayabilir. Bu sebeple daha kolay ve daha pratik olan bazı türev alma kurallarını ispatsız olarak vereceğiz.

1. Sabit Fonksiyonun Türevi

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $f'(x) = 0$ dır.

Örnek

•*$f(x) = 3$, $g(x) = \pi$, $h(x) = e$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.*

Çözüm: Verilen fonksiyonların her biri sabit olduğundan türevleri,

$$f'(x) = g'(x) = h'(x) = 0$$

dır.

2. $f(x) = x^n$ Fonksiyonun Türevi

$n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ ise $f'(x) = nx^{n-1}$'dir.

Üsler çarpan olarak yazılır ve üs bir azaltılır.

Örnek

•*$f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.*

Çözüm: $f(x) = x^4$ fonksiyonunun türevi, kuraldan $f'(x) = 4x^3$ olarak bulunur. $g(x) = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun türevine geçmeden önce fonksiyon $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ şeklinde üslü olarak yazılır sonrada türevi

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$$

olarak bulunur.

3. İki Fonksiyonun Toplamının ve Farkının Türevi

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

ve

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

dir. Yani türevlenebilen iki fonksiyonun toplamının veya farkının türevi, bu fonksiyonların türevleri toplamına ve farkına eşittir. Bu kuralı n tane türevlenebilen fonksiyona genelleştirebiliriz. Yani, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ fonksiyonları türevlenebilirse

Türevlenebilen iki fonksiyonun toplamının veya farkının türevi, türevleri toplamına veya farkına eşittir.

$$[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]' = f'_1(x) + f'_2(x) + \cdots + f'_n(x)$$

ve

$$[f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x)]' = f'_1(x) - f'_2(x) - \cdots - f'_n(x)$$

olur.

Örnek

•*$f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: $f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonunu $g(x) = x^3$ ve $h(x) = 2$ olmak üzere

$$f(x) = g(x) + h(x) = x^3 + 2$$

şeklinde düşünebiliriz. $g'(x) = 3x^2$ ve $h'(x) = 0$ olduğundan

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$$

olur.

Örnek

• *$f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$ fonksiyonunu $g(x) = x^2$, $h(x) = \sqrt{x}$ ve $k(x) = 3$ olmak üzere

$$f(x) = g(x) + h(x) + k(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$$

şeklinde düşünebiliriz. Buna göre $g'(x) = 2x$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $k'(x) = 0$ olduğundan

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) + k'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bulunur.

4. İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi

Türevlenebilen bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının türevi, fonksiyonun türevinin bu sabitle çarpımına eşittir.

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$$

dir. Bu fonksiyonlardan biri sabit ise $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[cf(x)]' = c\,f'(x)$$

olur. Eğer ikiden fazla fonksiyonun çarpımının türevi söz konusu ise $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ fonksiyonları türevlenebilir olmak üzere

$$\begin{aligned}[f_1(x).f_2(x).\ldots.f_n(x)]' = {} & f'_1(x).\big(f_2(x).f_3(x).\ldots.f_n(x)\big) \\ & + f'_2(x)\big(f_1(x).f_3(x).\ldots.f_n(x)\big) \\ & + \cdots \\ & + f'_n(x)\big(f_1(x).f_2(x).\ldots.f_{n-1}(x)\big)\end{aligned}$$

olur.

Örnek

•$f(x) = x^3(2x+1)$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon ise $(f.g)' = f'g + fg'$

Çözüm: Burada $g(x) = x^3$ ve $h(x) = 2x+1$ denilirse $f(x) = g(x)h(x)$ olur. $g'(x) = 3x^2$ ve $h'(x) = 2$ türevleri aşağıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f'(x) = \big(g(x)h(x)\big)' &= g'(x)h(x) + h'(x)g(x) \\ &= 3x^2(2x+1) + 2x^3 \\ &= 6x^3 + 3x^2 + 2x^3 \\ &= 8x^3 + 3x^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek

•$f(x) = (x^2+3x)(3x-2)$ *fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: Burada $g(x) = x^2 + 3x$ ve $h(x) = 3x - 2$ denilirse $f(x) = g(x)h(x)$ olur. $g'(x) = 2x + 3$ ve $h'(x) = 3$ türevleri aşağıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f'(x) = \big(g(x)h(x)\big)' &= g'(x)h(x) + h'(x)g(x) \\ &= (2x+3)(3x-2) + 3(x^2+3x) \\ &= 6x^2 - 4x + 9x - 6 + 3x^2 + 9x \\ &= 9x^2 + 14x - 6 \end{aligned}$$

bulunur.

5. İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{\big(g(x)\big)^2}$$

dir.

Örnek

• *$f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: Burada $g(x)=3x$ ve $h(x)=x^2+2$ denilirse $g'(x)=3$ ve $h'(x)=2x$ olur.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{3x}{x^2+2}$$

olmak üzere

$$f'(x)=\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)'=\frac{g'(x).h(x)-h'(x).g(x)}{\left(h(x)\right)^2}$$

$$=\frac{3(x^2+2)-2x.3x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}$$

bulunur.

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon ise $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-g'.f}{(g)^2}$

Örnek

• *$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.*

Çözüm: Burada $g(x)=\sqrt{x}$ ve $h(x)=x+2$ denilirse $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $h'(x)=1$ olur.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$$

olmak üzere

$$f'(x)=\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)'=\frac{g'(x).h(x)-h'(x).g(x)}{\left(h(x)\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+2)-1.\sqrt{x}}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{\frac{x+2}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{-x+2}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$$ elde edilir.

6. Bileşke Fonksiyonun Türevi (Zincir Kuralı)

f ve g, bileşkeleri tanımlanabilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ olur. Eğer g, x de ve f de $g(x)$ de türevlenebilir ise

$$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

olur.

$u = u(x)$ olmak üzere $y = f(u)$ ise $y' = f'(u).u'$ dir.

Bu son eşitliği şu şekilde de yazabiliriz: $u = g(x)$ olarak alınırsa $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ olduğu için $y = f(u)$ olur. Buna göre yukarıdaki türev, $y' = f'(u).u'$ veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek

•$y = f(x) = (x^3 + 2x)^4$fonksiyonun türevini bulunuz.

Çözüm: $u = x^3 + 2x$ denilirse $u' = 3x^2 + 2$ ve $y = u^4$ olur. Zincir kuralından

$$y' = 4u^3.u' = 4(x^3 + 2x)^3(3x^2 + 2)$$

bulunur.

Örnek

•$y = f(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^3$ fonksiyonun türevini bulunuz..

Çözüm: $u = \frac{x^2+1}{x+1}$ denilirse bölümün türevinden $u' = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$ ve $y = u^3$ olur. Zincir kuralından

$$y' = 3u^2.u' = 3\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^2\left(\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right)$$

bulunur.

7. Üstel ve logaritma fonksiyonunun türevi

$y = f(x) = a^x$ fonksiyonunun türevi $y' = f'(x) = a^x lna$ ve $y = g(x) = e^x$ fonksiyonunun türevi de $y' = g'(x) = e^x$ dir. Daha genel olarak, $u = u(x)$ olmak üzere $y = a^u$ ise $y' = u'a^u lna$ ve $y = e^u$ ise $y' = u'e^u$ dır. $y = \log_a x$

fonksiyonunun türevi $y' = \frac{1}{xlna}$ ve $y = ln\,x$ fonksiyonunun türevi de $y' = \frac{1}{x}$ dir. Yine $u = u(x)$ olmak üzere $y = \log_a u$ ise $y' = \frac{u'}{ulna}$ ve $y = ln\,u$ ise $y' = \frac{u'}{u}$ dır.

$u = u(x)$ olmak üzere
$y = e^u$ ise
$y' = u'e^u$ dur.

Örnek

•Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1. $y = e^{2x}$
2. $y = 2^x$
3. $y = 3^{x^2+1}$
4. $y = \log_2 x$
5. $y = \log(x^3 + x)$
6. $y = ln(x^2 + 1)$

Çözüm:

1. $u = 2x$ denilirse $y = e^u$ olur. Buradan $u' = 2$ olup, $y' = u'e^u = 2e^{2x}$ bulunur.
2. $y' = 2^x ln2$
3. $u = x^2 + 1$ denilirse $y = 3^u$ olur. Buradan $u' = 2x$ olup, $y' = u'3^u ln3 = 2x.3^{x^2+1} ln3$ bulunur.
4. $y' = \frac{1}{xln2}$
5. $u = x^3 + x$ denilirse $y = \log u$ olur. Buradan $u' = 3x^2 + 1$ olup, $y' = \frac{u'}{uln10} = \frac{3x^2+1}{(x^3+x)ln10}$ bulunur.
6. $u = x^2 + 1$ denilirse $y = lnu$ olur. Buradan $u' = 2x$ olup, $y' = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2+1}$ bulunur.

$u = u(x)$ olmak üzere
$y = lnu$ ise
$y' = \frac{u'}{u}$ dur.

Yüksek Mertebeden Türevler:

$y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilirse bunun türevi olan $f'(x)$ fonksiyonuna $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi veya birinci mertebeden türevi denir. Eğer $f'(x)$ fonksiyonu da bu aralıkta türevlenebilirse bunun türevi olan $f''(x)$ fonksiyonuna $y = f(x)$ in ikinci mertebeden türevi denir. Bu şekilde devam edilirse $f(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevi $f^{(n)}(x)$ olur. $n \geq 2$ olmak üzere $f^{(n)}(x)$ e, $f(x)$ in yüksek mertebeden türevi denir. Bu türevler

$y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$ veya $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$

sembolleriyle de gösterilir.

Örnek

• $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ *fonksiyonunun birinci mertebeden,ikinci mertebeden ve üçüncü mertebeden türevlerini bulunuz.*

Çözüm: Verilen fonksiyonun istenen türevleri sırasıyla,

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 3$, $f''(x) = 12x^2 + 12x - 8$ ve

$f'''(x) = 24x + 12$

bulunur.

Örnek

• $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm: Bunun için önce verilen fonksiyonun birinci ve ikinci dereceden türevlerini bulmalıyız. Buna göre,

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$ ve $f'''(x) = 8e^{2x}$

olur.

f nin üçüncü mertebeden türevinin art arda üç defa türev alma anlamına geldiğine dikkat ediniz.

Bireysel Etkinlik

• Türevin fiziksel ve matematiksel anlamının yanısıra , diğer alanlardaki anlamlarını inceleyiniz.

Özet

- Bu ünitede ilk olarak türevin anlamı ve uygulama alanlarından bahsedildi. Sonra türevin tanımı verildi ve tanımla ilgili örnekler çözüldü. Türev tanımı ile türev hesabının çokta pratik bir yol olmadığı görüldü. Bu nedenle ispatsız olarak türev alma kuralları verilip bunlarla ilgili olarak örnekler çözüldü. Daha sonra yüksek mertebeden türevler verildi.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ise, $f'(0)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 0
   b) 3
   c) 1
   d) -2
   e) 4

2. $f(x) = \sqrt{x+1}$ ise, $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{1}{2}$
   b) 2
   c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
   d) $\sqrt{2}$
   e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $f(x) = 2x^3 + x$ ise, $f'(x)$ türevi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $6x^2 + 1$
   b) $x^2 + 1$
   c) x^3
   d) $6x^2$
   e) $6x^2 + x$

4. $f(x) = \sqrt{x}e^x$ ise, $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\sqrt{x} + e^x$
   b) $\frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x$
   c) $2\sqrt{x}e^x$
   d) $\frac{e^x}{2\sqrt{x}}$
   e) $\sqrt{x}e^x$

5. $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ ise, $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{2x}{(3x+1)^2}$
   b) $-\frac{2}{(3x+1)^2}$
   c) $\frac{2}{3x+1}$
   d) $\frac{2}{(3x+1)^2}$
   e) $\left(\frac{2}{3x+1}\right)^2$

6. $f(x) = (x^2+1)^{10}$ ise, $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $20x(x^2+1)^9$
   b) $10x(x^2+1)^9$
   c) $10(x^2+1)^9$
   d) $20x(x^2+1)^{10}$
   e) $10(2x+1)^9$

7. $f(x) = e^{2x}$ ise, $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) e^{2x}
   b) e^{x}
   c) $\frac{e^{2x}}{2}$
   d) $2e^{x}$
   e) $2e^{2x}$

8. $f(x) = 2^{3x}$ ise, $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 2^{2x}
   b) 2^{3x}
   c) $(ln2)2^{3x}$
   d) $(3\ ln2)2^{3x}$
   e) $(ln3)2^{3x}$

9. $f(x) = ln(2x+1)$ ise, $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{1}{2x+1}$
   b) $ln(2x+1)$
   c) 2
   d) $\frac{1}{2x+1}ln2$
   e) $\frac{2}{2x+1}$

10. $f(x) = log(x^2+1)$ ise, $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{2}{(x^2+1)ln10}$
   b) $\frac{2x}{(x^2+1)ln10}$
   c) $\frac{2x}{(x^2+1)}$
   d) $\frac{2}{(x^2+1)}$
   e) $\frac{2x}{(x^2+1)}lnx$

11. $f(x) = e^{3x}$ ise, $f'''(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $27e^{3x}$
   b) e^{3x}
   c) $9e^{3x}$
   d) $3e^{3x}$
   e) $81e^{3x}$

12. $f(x) = x^4 + x^3$ ise, $f'''(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 18
   b) 7
   c) 30
   d) 25
   e) 24

13. $f(x) = xe^x$ ise, $f''(0)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 3
   b) 1
   c) 0
   d) e
   e) 2

14. $f(x) = x^2 lnx$ ise, $f'(1)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 2
   b) 1
   c) 3
   d) 0
   e) 4

15. $f(x) = (3x + 1)^5$ise, $f'(0)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 5
   b) 20
   c) 15
   d) 3
   e) 4

Cevap Anahtarı

1.d, 2.c, 3.a, 4.b, 5.d, 6.a, 7.e, 8.d, 9.e, 10.b, 11.a, 12.c, 13.e, 14.b, 15.c

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Kadıoğlu, E. ve Kamali M., (2015). *Genel Matematik* Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-605-86149-56. *9. Baskı.* Eylül-2015. Erzurum.

[2} Bayraktar, M., (2007). *Analize Giriş I*. Grafiker Yayıncılık, 1. Cadde 33. Sokak No:6, 06520 Balgat Ankara, Yayın No: 32. ISBN: 978-975-6355-34-3. 2. Baskı. Ankara.

[3] Balcı, M., (2008). Matematik Analiz. Balcı Yayınları. Mithat Paşa Cad. 43/8, Kızılay Ankara. ISBN: 978-9756683-02-6. 7. Baskı Ankara

[4] Barnett, M. A., Ziegler, M.R. ve Byleen, K.E. (2011). İşletme, İktisat ve Sosyal Bilimler için Genel Matematik, 12. Baskıdan Çeviri, Çeviri Editörü A. SABUNCUOĞLU, Nobel Yayıncılık. İstanbul.

TÜREV UYGULAMALARI

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Limit problemlerinde karşılaşılan belirsizlikleri türev yardımıyla çözebilecek,
  - Fonksiyonların bir noktadaki teğet ve normalinin denklemlerini elde edebilecek,
  - Fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıkları bulabilecek,
  - Fonksiyonların maksimum ve minimum değerlerini hesaplayabilecek,
  - Fonksiyonların büküm noktalarını elde edebileceksiniz.

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Murat SUBAŞI

ÜNİTE

12

BELİRSİZ HALLER

- *L'hôpital Kuralı Ve Bazı Cebirsel İşlemler Vasıtasıyla Limitte Karşılaşılan Belirsizlikleri Giderme*

TEĞET VE NORMALİN DENKLEMİ

- *Verilen Bir Eğriye Üzerindeki Bir Noktadan Çizilen Teğet Ve Normal Doğrularının Denklemlerini Elde Etme*

ARTAN-AZALAN FONKSİYONLER

- *Birinci Mertebeden Türevin İşaretinden Faydalanarak Fonksiyonların Artan Ya Da Azalan Olmasını İnceleme*

FONKSİYONLARIN MAKSİMUMU VE MİNİMUMU

- *Birinci Mertebeden Türevin İşaret Değişimini Kullanarak Fonksiyonların Maksimum Ve Minimum Noktalarını Belirleme*

BÜKÜM NOKTALARI

- *İkinci Mertebeden Türevin İşaret Değişiminden Faydalanarak Fonksiyonların Bükülme Özelliklerin İnceleme*

GİRİŞ

11. Ünite'de verilen "Türev" kavramı, birçok alanda olduğu gibi günlük hayatımızda da karşılaşabileceğimiz birçok problemde kullanabileceğimiz bir kavramdır. Genel olarak türev herhangi bir bağımlı değişkenin ona etki eden bağımsız değişkene göre hangi hızla değiştiğini ifade eder. Bu değişimin pozitif olmasının, negatif olmasının veya hiç olmamasının birer anlamı vardır. Örneğin bir işletmede üretim sayısına bağlı olarak ortalama maliyetin hesaplanması, maliyetin arttığı aralıkların belirlenmesi, hangi üretim düzeyinde kârın maksimum olacağı *vb.* konular maliyet ve kâr fonksiyonları belirlendikten sonra bunların türevlerinin yorumlanmasına bağlı olarak elde edilecek sonuçlardandır. Diğer yandan belirli bir yükseklikten bırakılan ve serbest düşme hareketine maruz kalan bir cismin ne zaman yere düşeceği veya hangi hızla yere çarpacağı gibi konular bu cisme ait hareket fonksiyonu yazıldıktan sonra bu fonksiyonun ve türevinin ortaya çıkaracağı sonuçlardan elde edilebilir. Hemen hemen her bilim alanındaki birçok konu için bu gibi örnekler vermek mümkündür. Dolayısıyla türev uygulamaları çoğu bilim alanının kullandığı önemli bir konudur.

Bu bölümde, türevin bazı uygulamaları 5 kısım olarak ele alınacaktır. *I. kısımda* bazı limit hesaplamalarında ortaya çıkan belirsiz hâller ele alınacak ve belirsiz formdaki limitleri hesaplamak için türevin nasıl kullanılacağı incelenecektir, *II. kısımda* verilen bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normalin denklemi türevi içeren birer denklem ile yazılacak, *III. kısımda* fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar o fonksiyonun türevinin işareti sonucunda belirlenecek, *IV. kısımda* fonksiyonların maksimum veya minimum değerleri onların kritik noktaları vasıtasıyla hesaplanacak ve son olarak *V. kısımda* fonksiyonların grafiklerinin çizilmesinde rol oynayan bükeylik kavramı incelenecektir.

Belirsiz Hâller

Bazı limit hesaplamalarında

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\times\infty, 0^0, \infty^0 \text{ ve } 1^\infty$$

durumları ile karşılaşılır. Bu ifadeler belirsiz hâller olarak adlandırılır. Bu ifadelere benzeyen

$$\infty+\infty, -\infty-\infty, 0^{+\infty} \text{ ve } 0^{-\infty}$$

durumları ise belirsizlik olmayıp bu durumlarda

$$\infty+\infty\to+\infty, -\infty-\infty\to-\infty, 0^{+\infty}\to 0 \text{ ve } 0^{-\infty}\to+\infty$$

sonuçları geçerlidir [1].

Limit konusunda $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlikleri ile karşılaştığımızda bazı cebirsel işlemler yaparak belirsizliği kaldırıp limitlerin sonuçlarını elde edebilmiştik.

Ancak bu durum her zaman müsait olmayabilir. Örneğin

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \text{ ve } \lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x-2}$$

limitlerini ele aldığımızda birinci limit için verilen fonksiyonda sadeleştirme yaparak sonucu kolayca bulabilecekken ikinci limitte böyle bir şansımız yoktur.

L'Hôpital Kuralı'nda payın türevinin paya, paydanın türevinin de paydaya yazıldığına dikkat ediniz.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği

Bu kısımda türev bilgisine dayanan ve bu tür belirsizlikler için kullanılabilecek çok pratik bir metot olan L'Hôpital (Löpital) Kuralı'nı ele alacağız.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliği için L'Hôpital Kuralı:

$f(x)$ ve $g(x)$, (a,b) aralığında türevlenebilen iki fonsiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Eğer $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ve her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eşitliği geçerlidir. Bu kural $x \to \pm\infty$ için de geçerlidir.

Örnek

• $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ ve $\lim_{x\to 0} x = 0$ olduğundan $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. $(\sin x)' = \cos x$ ve $x' = 1$ türevleri göz önüne alınırsa L'Hôpital Kuralı'na göre

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

bulunur.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

Bu belirsizlik türünde de L'Hôpital Kuralı ile sonucu kolayca elde edebiliriz.

$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ durumları $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olarak bilinir.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği için L'Hôpital Kuralı:

$f(x)$ ve $g(x)$, (a,b) aralığında türevlenebilen iki fonsiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Eğer $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ ve her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

eşitliği geçerlidir. Bu kural $x \to \pm\infty$ için de geçerlidir.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ olduğundan verilen limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'Hôpital Kuralı'ndan

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$$

elde edilir.

Bazı limit hesaplamalarında L'Hopital Kuralı'nın belirsizlik kalkana kadar uygulanması gerekebilir. Bu durumda

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

eşitliği geçerli olur.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x^2-x}{2x^2+1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^2 - x) = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+1) = +\infty$ olduğundan $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. $(4x^2 - x)' = 8x - 1$ ve $(2x^2+1)' = 4x$ olduğundan L'Hôpital Kuralı'na göre

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x-1}{4x}$$

eşitliği geçerlidir. Son limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaşılmaktadır. Bir kez daha L'Hôpital Kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x-1}{4x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{4} = 2$$

olarak bulunur. Yani

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x-1}{4x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{4} = 2$$

elde edilir.

Belirsizlik kalkana kadar L'Hôpital Kuralı art arda uygulanabilir.

$\infty - \infty$ Belirsizliği

Bu tür belirsizliklerde limiti hesaplanacak fonksiyon üzerinde bazı işlemler yaparak ifadeyi $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine çevirdikten sonra L'Hopital Kuralı'nı uygulayarak sonucu elde etmeye çalışırız.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ limitinde $\infty - \infty$ şeklinde bir belirsizlik vardır. Parantez içerisinde payda eşitlemesi yapılırsa,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\sin x - x}{x\sin x}\right)$$

yazılabilir. Bu limitte ise $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile karşılaşılır. L'Hôpital Kuralı'ndan

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\sin x - x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\right)=\frac{2-1}{0}=+\infty$$

bulunur. Burada $+\infty \notin \mathbb{R}$ olduğundan limit yoktur.

$0 \times \infty$ Belirsizliği

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ ise $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ limitinde $0\times\infty$ şeklinde bir belirsizlik ile karşılaşılır. Bu durumda

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

ya da

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılırsa $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine geçilmiş olur. Sonra L'Hopital Kuralı uygulanabilir.

$\infty - \infty$ ve $0\times\infty$ belirsizliklerinde önce $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine geçilir. Sonra L'Hôpital Kuralı uygulanır.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x\ln x)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ olduğundan verilen limitte $0 \times \infty$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0^+}(2x.\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{2x}}$$

şeklinde yazarsak ikinci limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ortaya çıkar. L'Hôpital Kuralı'ndan

$$\lim_{x\to 0^+}(2x.\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-2x) = 0$$

elde edilir.

$\mathbf{0^0}, \infty^{\mathbf{0}}$ ve $\mathbf{1^\infty}$ Belirsizlikleri

Bu belirsizlikler $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}$ şeklindeki limitlerde karşımıza çıkar. Logaritmanın özelliklerinden faydalanılarak

$$\big(f(x)\big)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}$$

yazılabilir. $x \to x_0$ için limite geçilirse

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}$$

yazılır.

Eğer $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln\big(f(x)\big) = L$ limiti mevcutsa

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln\left(f(x)\right)} = e^L$$

sonucu bulunur.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} 1/\ln x = 0$ olduğundan verilen limitte 0^0 belirsizliği mevcuttur.

$$x^{1/\ln x} = e^{\ln x^{1/\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\ln x} = e^1$$

olduğundan $x \to 0^+$ için limite geçilirse

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^1 = e^1$$

bulunur.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{x}}$ limitinde ∞^0 belirsizliği mevcuttur.

$$x^{\frac{5}{x}} = e^{\ln x^{\frac{5}{x}}} = e^{\frac{5}{x}\ln x} = e^{\frac{5\ln x}{x}}$$

olduğundan $x \to +\infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{5\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\ln x}{x}}$$

yazılır. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\ln x}{x}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği mevcut olduğundan L'Hôpital Kuralı ile

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x} = 0$$

elde edilir.

Böylece istenen limit

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

olarak bulunur.

Örnek

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ limitinde 1^∞ belirsizliği mevcuttur.

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = e^{x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

olduğundan $x \to +\infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

yazılır. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)$ limitinde $0\times\infty$ belirsizliği mevcut olduğundan bu limiti

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1/x}$ şeklinde yazıp $\frac{0}{0}$ belirsizliğine geçeriz. Buradan da L'Hôpital Kuralı ile

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2/x^2}{1-\frac{2}{x}}}{-1/x^2}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{1-\frac{2}{x}}=-2$$

elde edilir. Böylece istenen limit

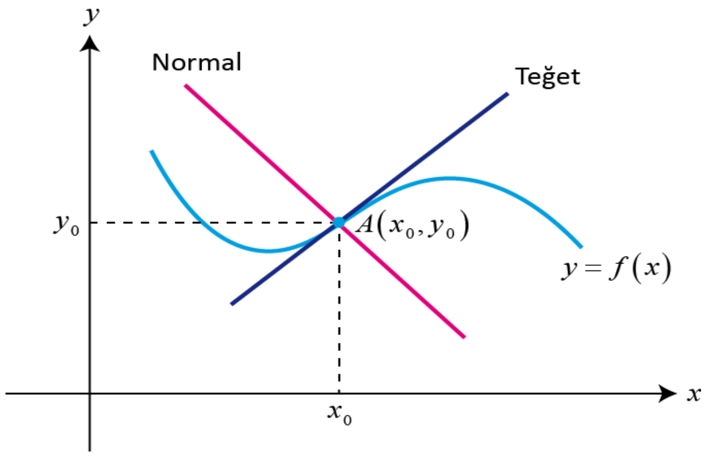
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}=e^{-2}$$

olarak bulunur.

Teğet ve Normalin Denklemi

Bu kısımda, verilen bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğet ve normal doğrularının denklemleri verilecektir [2].

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonun grafiği üzerindeki bir $A(x_0,y_0)$ noktasından geçen teğet ve normal doğruları Şekil 12.1'de gösterilmiştir.



Şekil 12.1

Teğetin Denklemi

$y=f(x)$ fonksiyonu ile verilen bir eğriyi göz önüne alalım. Bu eğrinin üzerindeki bir $A(x_0,y_0)$ noktasından çizilen teğet doğrunun eğimi $m_T=f'(x_0)$ sayısıdır. Eğimi m_T olan ve $A(x_0,y_0)$ noktasından geçen doğrunun denkleminin de

$$y-y_0=m_T(x-x_0)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece bu teğet doğrunun denklemi

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

ile ifade edilir.

Birbirlerine dik olan iki doğrunun eğimlerinin çarpımının -1 olduğunu hatırlayınız.

Normalin Denklemi

$y = f(x)$ fonksiyonu ile verilen bir eğriye üzerindeki bir $A(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğet ve normal doğruları birbirine dik olacağından bu doğruların eğimlerinin çarpımı "-1" sayısıdır. Bu yüzden normalin eğimi

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

olur. Dolayısıyla normal doğrunun denklemi,

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ile ifade edilir.

Örnek

• $f(x) = x^3$ fonksiyonuna $x_0 = -2$ apsisli noktadan çizilecek teğet doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Bu doğrunun eğimi $m_T = f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$ olup $(x_0, y_0) = (-2, -8)$ noktasından geçeceğinden denklemi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (-8) = 12\big(x - (-2)\big) \Rightarrow y = 12x + 16$$

olarak bulunur.

Örnek

• $f(x) = x^2 - x$ fonksiyonuna $x_0 = 3$ apsisli noktadan çizilecek normal doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Normal doğrunun eğimi $m_N = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2(3)-1} = -\frac{1}{5}$ olup $(x_0, y_0) = (3,6)$ noktasından geçeceğinden, denklemi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{33}{5}$$

olarak bulunur.

$y = ax + b$ doğrusunun eğimi a sayısıdır.

Örnek

•$A(1,4)$ noktasından geçen ve $3x + 2y = 1$ doğrusuna dik olan doğru denklemini yazınız.

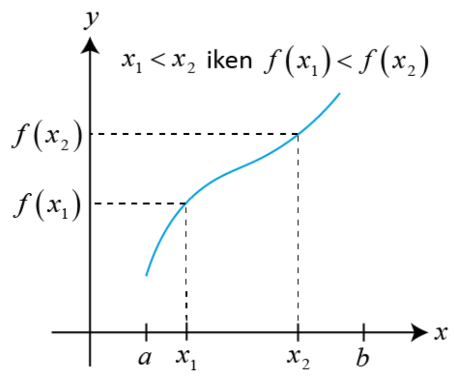
Çözüm: $y = ax + b$ doğrusunun eğimi a sayısıdır. $3x + 2y = 1$ doğrusunu $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ şeklinde yazarsak eğiminin $-\frac{3}{2}$ olduğunu görürüz. Bu doğruya dik olan doğrunun eğimi de $m = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ olacaktır. O hâlde $A(1,4)$ noktasından geçen ve eğimi $m = \frac{2}{3}$ olan doğrunun denklemi

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 1) \Longrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

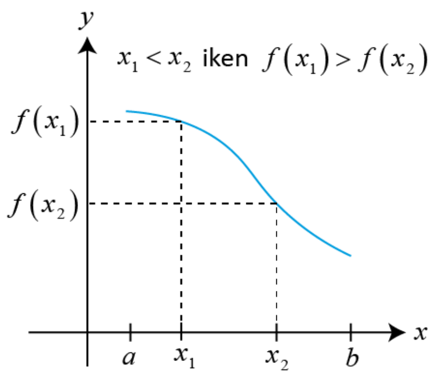
olarak bulunur.

Artan-Azalan Fonksiyonlar

Tanım: f, $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Her x_1, $x_2 \in [a, b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna bu aralıkta artan fonksiyon denir (Şekil 12.2). Benzer şekilde her x_1, $x_2 \in [a, b]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna bu aralıkta azalan fonksiyon denir (Şekil 12.3).



Şekil 12.2



Şekil 12.3

Tanımdan hareketle bir fonksiyonun artan veya azalan olduğunu tespit etmek çok da kolay değildir. Ancak türev yardımıyla kolay bir hâle getirilebilir.

Not: f fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun.

i. Eğer $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu artandır,
ii. Eğer $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu azalandır,
iii. Eğer $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ ise f fonksiyonu sabittir.

Yani verilen bir aralıkta, fonksiyonun türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon artan, türevi negatif ise o aralıkta fonksiyon azalandır.

Örnek

•$f(x) = x^2 + 4x - 5$ fonksiyonunun artan-azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^2 + 4x + 5$ fonksiyonu için $f'(x) = 2x + 4$ türevi elde edilir. Türev fonksiyonunun işaret tablosu, 5. Ünitedeki Tablo 5.1' e göre

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

şeklinde olur. Buradan fonksiyonunun $(-\infty, -2)$ aralığında azalan ve $(-2, +\infty)$ aralığında artan olduğu görülür.

Fonksiyonların Maksimumu ve Minimumu

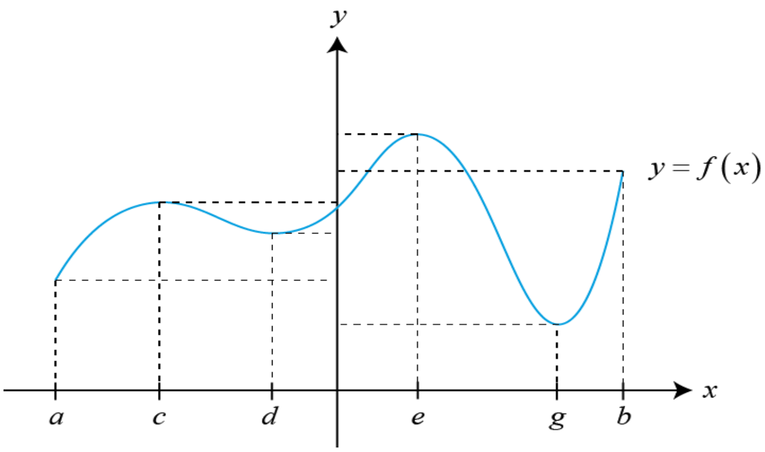
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $c \in [a, b]$ noktasının, tanım kümesinde kalan uygun bir komşuluğundaki her x değeri için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa $(c, f(c))$ noktasına f fonksiyonunun yerel maksimum noktası, $f(c)$ sayısına da yerel maksimum değeri denir.

Benzer şekilde bir $d \in [a, b]$ noktasının, tanım kümesinde kalan uygun bir komşuluğundaki her x için $f(d) \leq f(x)$ oluyorsa $(d, f(d))$ noktasına f fonksiyonunun yerel minimum noktası, $f(d)$ sayısına da yerel minimum değeri denir.

Her mutlak maksimum veya mutlak mininum nokta aynı zamanda bir yerel maksimum veya yerel minimum noktadır. Fakat tersi doğru değildir.

Bu tanımdaki $f(x) \leq f(c)$ ya da $f(d) \leq f(x)$ eşitsizlikleri f fonksiyonunun tanım kümesindeki her x için sağlanıyorsa $(c, f(c))$ noktasına mutlak maksimum nokta ve $f(c)$ sayısına da mutlak maksimum değer, $(d, f(d))$ noktasına mutlak minimum nokta ve $f(d)$ sayısına da mutlak minimum değer denir.

Bir fonksiyonun maksimum veya minimum noktalarına o fonksiyonun extremum noktaları, maksimum veya minimum değerlerine de extremum değerleri denir.



Şekil 12.4

Şekil 12.4 ile verilen $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ fonksiyonu için maksimum ve minimum noktalar

- Yerel Maksimum Noktalar $\Longrightarrow \big(c,f(c)\big),\big(e,f(e)\big),\big(b,f(b)\big)$
- Mutlak Maksimum Nokta $\Longrightarrow \big(e,f(e)\big),$
- Yerel Minimum Noktalar $\Longrightarrow \big(a,f(a)\big),\big(d,f(d)\big),\big(g,f(g)\big)$
- Mutlak Minimum Nokta $\Longrightarrow \big(g,f(g)\big),$

şeklindedir.

Bir fonksiyonun türevini sıfır veya tanımsız yapan noktaya o fonksiyonun kritik noktası denir.

Bir fonksiyonun extremum noktaları o fonksiyonun kritik noktaları arasında aranır.

Her ekstremum nokta kritik noktadır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve c noktası da bu fonksiyonun tanımlı olduğu bir kritik noktası olsun.

i. Bu noktada türevin işareti pozitiften negatife dönüyorsa bu nokta bir yerel maksimum noktadır.

ii. Bu noktada türevin işareti negatiften pozitife dönüyorsa bu nokta bir yerel minimum noktadır.

iii. Bu noktada türevin işareti değişmiyorsa bu nokta bir extremum nokta değildir.

Örnek

•$f:[-5{,}5]\to\mathbb{R}:\ f(x)=x^3-12x$ fonksiyonunun extremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f(x)=x^3-12x$ fonksiyonu için $f'(x)=3x^2-12$ türevi elde edilir. Buradan $x=-2$ ve $x=2$ noktaları türevi sıfır yapan kritik noktalardır. $[-5{,}5]$ aralığında türev fonksiyonunun değişim tablosu

x	-5		-2		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-65	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	65
	mutlak min		yerel mak		yerel min		mutlak mak

şeklinde olur.

Maksimum ve minimum noktalarda türevin işaret değiştirdiğine dikkat ediniz.

$x=-2$'de türevin işareti pozitiften negatife döndüğünden $(-2,16)$ noktası bir yerel maksimum noktadır.

$x=2$'de türevin işareti negatiften pozitife döndüğünden $(2,-16)$ noktası bir yerel minimum noktadır.

$x=-5$ için fonksiyon en küçük değerini -65 ile aldığından $(-5,-65)$ noktası bir mutlak minimum noktadır.

$x=5$ için fonksiyon en büyük değerini 65 ile aldığından $(5,65)$ noktası bir mutlak maksimum noktadır.

Örnek

•$f:\mathbb{R}\backslash\{2\}\to\mathbb{R}$: $f(x)=\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$ fonksiyonunun extremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f(x)=\left(\frac{x}{x-2}\right)^2$ fonksiyonu için $f'(x)=\frac{-4x}{(x-2)^3}$ türevi elde edilir. Buradan $x=0$ noktası türevi sıfır yapan bir kritik nokta iken $x=2$ noktası türevi tanımsız yapan bir kritik noktadır. Fakat bu noktada fonksiyon da tanımlı değildir. Türev fonksiyonunun değişim tablosu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-4x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-2)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	tanımsız	$\searrow$	
			yerel min				

şeklinde olur.

$x=0$ da türevin işareti negatiften pozitife döndüğünden $(0,0)$ noktası bir yerel minimum noktadır.

$x=2$'de türevin işareti değişmiştir. Fakat bu değer için fonksiyon tanımlı olmadığından bu nokta bir extremum nokta değildir.

Örnek

•$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun extremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu için $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ türevi türevi elde edilir. Buradan $x = 0$ noktası türevi tanımsız yapan bir kritik noktadır. Fakat bu noktada fonksiyon tanımlıdır. $[0, +\infty)$ aralığında türev fonksiyonunun değişim tablosu

x	0			$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	$+$	
$f(x)$	0 mutlak min		$\nearrow$	$+\infty$

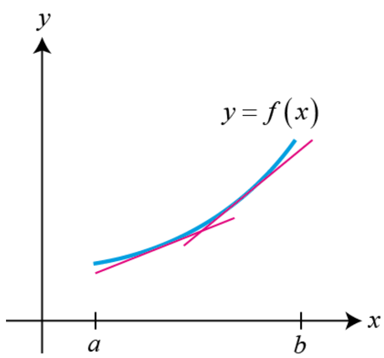
şeklinde olur.

$\boldsymbol{x = 0}$ noktasında fonksiyon 0 değerini aldıktan sonra artarak sonsuza gitmiştir. Dolayısıyla bu nokta bir mutlak minimum noktadır.

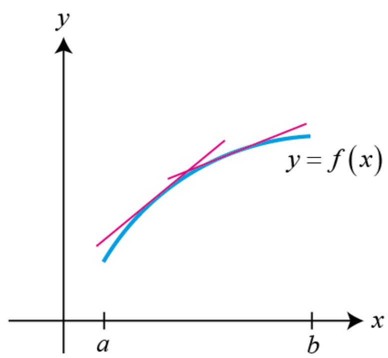
Büküm Noktaları

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta f' türevi artan ise f fonksiyonuna yukarı bükey ya da konveks, f' türevi azalan ise f fonksiyonuna aşağı bükey ya da konkav denir.

Geometrik olarak fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta, grafiği üzerinde çizilecek bütün teğetler fonksiyon eğrisinin altında kalıyorsa fonksiyon bu aralıkta yukarı bükey (konveks) olur (Şekil 12.5). Eğer teğetler fonksiyon eğrisinin üstünde kalıyorsa fonksiyon bu aralıkta aşağı bükey(konkav) olur (Şekil 12.6).



Şekil 12.5



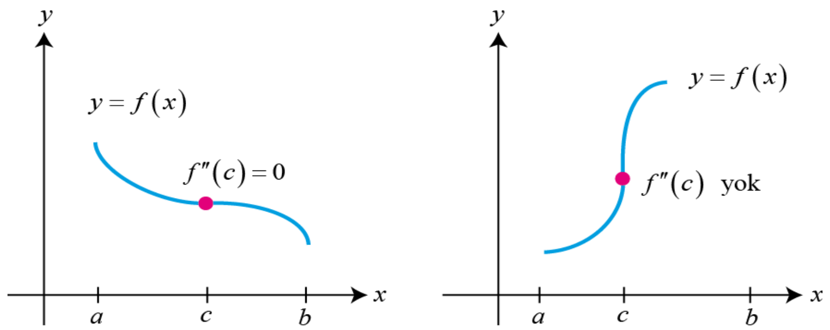
Şekil 12.6

Bir fonksiyonun bükeyliğinin yönü ile ikinci türevinin işareti arasındaki ilişki şöyledir.

$f:[a,b] \to \mathbb{R}, y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında iki kez türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

i. (a,b) aralığında $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu bu aralıkta yukarı bükeydir(konveks).
ii. (a,b) aralığında $f''(x) < 0$ ise f fonksiyonu bu aralıkta aşağı bükeydir(konkav).

f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya büküm noktası denir. Büküm noktasında ikinci türev sıfır ya da tanımsız olur (Şekil 12.7).



Şekil 12.7

Örnek

• $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2$ fonksiyonunun büküm noktalarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2$ fonksiyonu için $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ ve $f''(x) = x^2 - 3x + 2$ türevleri bulunur. Buradan $x = 1$ ve $x = 2$ noktaları ikinci türevi sıfır yapan noktalardır. İkinci türev fonksiyonunun değişim tablosu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		konveks	Büküm noktası	konkav	Büküm noktası	konveks	

şeklinde olur.

Buna göre fonksiyon $(-\infty, 1)$ aralığında konveks, $(1,2)$ aralığında konkav ve $(2, +\infty)$ aralığında konvekstir.

$x = 1$ noktasında konvekslikten konkavlığa geçtiğinden bu nokta bir büküm noktasıdır.

$x = 2$ noktasında konkavlıktan konveksliğe geçtiğinden bu nokta da bir büküm noktasıdır.

Bu bölümde bu kadar örnekle yetineceğiz. İlave örnekler için [3-4] çalışmalarından faydalanılabilir.

Bireysel Etkinlik

- Arabanızla evinizden iş yerinize giderken karşılaştığınız maksimum minimum olaylarının ne olabileceği üzerine düşününüz.

Özet

- Bazı limit hesaplamalarında ortaya çıkan belirsiz haller L'Hôpital Kuralı ile kolayca hesaplanabilir.
- Fonksiyon eğrisine bir noktada çizilecek teğetin denklemi, eğimin o noktadaki türeve eşit olduğu bilgisiyle, normalin denklemi de teğet ile normalin dik olduğu bilgisiyle kolayca elde edilebilir.
- Verilen bir aralıkta, fonksiyonun birinci türevi pozitif ise o aralıkta fonksiyon artan, negatif ise o aralıkta fonksiyon azalandır.
- Bir noktada fonksiyonun birinci türevinin işareti, pozitiften negatife dönüyorsa bu nokta bir yerel maksimum noktadır, negatiften pozitife dönüyorsa bu nokta bir yerel minimum noktadır, türevin işareti değişmiyorsa bu nokta bir extremum nokta değildir.
- Bir aralıkta fonksiyonun ikinci türevi pozitif ise fonksiyon bu aralıkta yukarı bükey(konveks), negatif ise fonksiyon bu aralıkta aşağı bükey(konkav) olur. Konvekslikten konkavlığa ya da konkavlıktan konveksliğe geçiş noktasına da büküm noktası denir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-e^x}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 0
   b) -1
   c) 1
   d) 2
   e) $+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x+1}{3x^2-4}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 1
   b) 4
   c) $1/4$
   d) $1/3$
   e) 3

3. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln\sqrt{x}}{x-1}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $+\infty$
   b) $-\infty$
   c) 0
   d) $1/2$
   e) -1

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 0
   b) 1
   c) -1
   d) $+\infty$
   e) $-\infty$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x}\right)^x$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 0
   b) e^2
   c) 2
   d) -2
   e) 1

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{4x}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?
   a) e^{-3}
   b) e^{4}
   c) e^{-12}
   d) e^{12}
   e) e^{-1}

7. $f(x) = x^3 + 8$ fonksiyonunun $A(1,9)$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = 2x - 8$
   b) $y = 3x + 8$
   c) $y = 3x - 8$
   d) $y = 3x + 6$
   e) $y = 3x - 6$

8. $f(x) = x^2 - x - 4$ fonksiyonunun $A(-2,10)$ noktasındaki normalinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = \frac{x}{5} + \frac{50}{5}$
   b) $y = -\frac{x}{5} - \frac{52}{5}$
   c) $y = -\frac{x}{5} + \frac{52}{5}$
   d) $y = \frac{x}{5} - \frac{52}{5}$
   e) $y = \frac{x}{5} + \frac{52}{5}$

9. $(\sqrt{3}, 0)$ noktasından geçen ve $x + y = 2$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $y = x + \sqrt{3}$
   b) $y = x - \sqrt{3}$
   c) $y = x - \sqrt{2}$
   d) $y = x + \sqrt{2}$
   e) $y = -x - 2\sqrt{2}$

10. $f(x) = 2x^3 - 6x^2$ fonksiyonu hangi aralıkta artandır?
   a) $(1, +\infty)$
   b) $(-2, +\infty)$
   c) $(0,1)$
   d) $(0,2)$
   e) $(-\infty, 0)$

11. $f(x) = -x^2 + 4x - 6$ fonksiyonunun azalan olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?
    a) $(-\infty, 2)$
    b) $(-2,0)$
    c) $(-1,0)$
    d) $(2, +\infty)$
    e) $(0,2)$

12. $f(x) = -3x^4 - x^2 + 1$ fonksiyonunun hangi apsisli noktada bir yerel maksimumu vardır?
    a) -1
    b) -3
    c) 0
    d) 1
    e) 3

13. $f: [-\infty, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{2-x}$ fonksiyonunun hangi apsisli noktada bir yerel minimumu vardır?
    a) 2
    b) -2
    c) 0
    d) -1
    e) 1

14. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 4$ fonksiyonunun aşağı bükey(konkav) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?
    a) $(-2,0)$
    b) $(-2,2)$
    c) $(-1,2)$
    d) $(1,2)$
    e) $(1,4)$

15. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4$ fonksiyonunun yukarı bükey(konveks) olduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?
    a) $\left(0, \frac{2}{3},\right)$
    b) $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
    c) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
    d) $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
    e) $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Cevap Anahtarı

1.a, 2.d, 3.d, 4.b, 5.e, 6.c, 7.d, 8.e, 9.b, 10.e, 11.d, 12.c, 13.a, 14.a

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Kadıoğlu, E. ve Kamali M., (2013). Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-975-8151-57-8. 8. Baskı. Eylül-2013. Erzurum.

[2] Cangül, İ. N., (2013). Matematik Cilt I, Calculus Early Transcendentals, Dennis G. ZILL-Warren S. WRIGHT. Çeviri Editörü: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL. Yayın No: 728. Matematik-İstatistik No: 042. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti. Sertifika No 20779. ISBN: 978-605-133-629-9. 4. Basımdan Çeviri, Eylül 2013.

[3] Balcı, M., (2012). Genel Matematik-1. Sürat Üniversite Yayınları. Çağlayan A.Ş., TS EN ISO 9001:2008 Ser Nu.: 300-01. Eylül 2012.

[4] Bayraktar, M., (2000). Analiz-I. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No: 166 Vipaş A.Ş. Yayın No: 42. ISBN: 975-564-108-4. Bursa.

GRAFİK ÇİZİMİ

İÇİNDEKİLER

- Asimptotlar
- Grafik Çizimi

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
- Asimptotları tanıyacak,
- Bir fonksiyonun grafiğini çizebileceksiniz.

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Murat SUBAŞI

ÜNİTE 13

Asimptotlar

- *Tanımsız oldukları noktalar civarında veya değişken sonsuza giderken fonksiyonların davranışlarını inceleme*

Grafik Çizimi

- *Fonksiyonlar hakkında elde edilen ilgileri birleştirerek onların değişim tablosunu hazırlama ve grafiklerini çizme*

GİRİŞ

Fonksiyonlar hakkında bu aşamaya kadar öğrendiğimiz bilgileri kullanarak onlara ait yorumlar yapıp bazı sonuçlar üretebiliriz. Örneğin fonksiyonların tanımlı veya tanımsız oldukları yerleri belirleyebilir, tanımsızlık noktalarına yaklaştıkça davranışlarını yorumlayabilir, artan veya azalan oldukları aralıkları elde edebilir, maksimum veya minimum noktalarını belirleyebilir veya bükülme noktalarını ortaya çıkarabiliriz. Bunun sonucunda da fonksiyonların kullanım amaçlarına göre karşılık geldiği olaylar hakkında sonuçlar elde edebiliriz. Şimdi bunların da ötesinde fonksiyonlara ait bu bahsettiğimiz bilgilerin hepsini birleştirip artık onların grafiklerini de çizebiliriz. Bir fonksiyonun grafiğini çizmek o fonksiyon üzerinde daha başka incelemeler ve genel yorumlar yapmamıza da olanak tanır. Diğer bir değişle bir fonksiyonun grafiği onun bütün davranışını resmeder ve özelliklerini gözler önüne serer. Bunun sonucunda da o fonksiyona ait yorumlar yapmak daha kolay olur. Bu nedenle bir fonksiyonun grafiğinin çizimi oldukça faydalı ve önemlidir.

Grafik çizimini iki başlıkta vereceğiz. *I. başlıkta* grafik çiziminde kullanılan önemli bir kavram olan asimptot (Fransızca “asymptote” kelimesinden gelen ve Türkçe kaynaklarda asimptot olarak kullanılan bu kavramın Türk Dil Kurumu Sözlüğündeki karşılığı “sonuşmaz” şeklindedir) kavramını tanıtıp asimptot çeşitlerini inceledikten sonra *II. başlıkta da* bir fonksiyonun değişim tablosunu oluşturularak grafiğinin nasıl çizileceğini ele alacağız.

Asimptotlar

Asimptotlar, fonksiyonun belirttiği eğriye sonsuzda teğet olan doğru veya eğrilerdir.

Asimptotlar, bir fonksiyonun grafiğini çizerken bize rehberlik edecek olan özel doğrular veya eğrilerdir. Asimptotlar kısaca, orijinden sonsuz uzaklaştığımızda bir eğriye teğet olan doğrular veya eğriler olarak ifade edilebilir. Dört tip asimptot vardır. Bunlar,

- Düşey Asimptot
- Yatay Asimptot
- Eğik Asimptot
- Eğri Asimptot

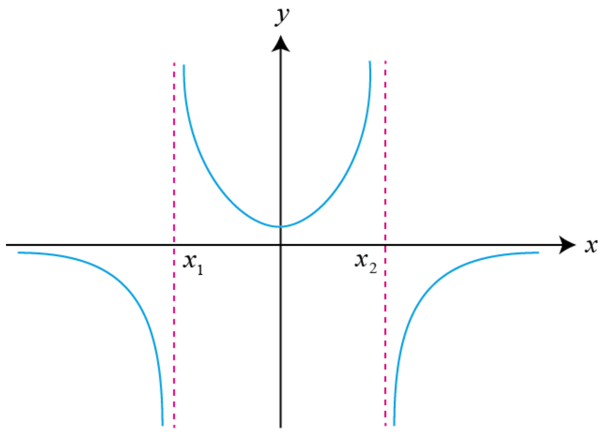
şeklindedir. Asimptotları geometrik olarak gösterirken, verilen fonksiyonun grafiği ile karışmaması için kesikli çizgiler kullanılır. Şimdi bu dört asimptotu sırayla inceleyelim.

Düşey Asimptot

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ veya } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

oluyorsa $x = x_0$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir (Şekil 13.1).



Şekil 13.1

Örnek

•$f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ fonksiyonunun varsa düşey asimptotlarını bulunuz.

x_0 değeri rasyonel fonksiyonun paydasını sıfır yapıyorken, payını sıfırdan farklı yapıyorsa $x = x_0$ doğrusu rasyonel fonksiyonun düşey asimptotu olur.

Çözüm: $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ fonksiyonunun paydasını sıfır yapan x değerleri $x^2 - 4 = 0$ denkleminin kökleri olan $x = -2$ ve $x = 2$ sayılarıdır.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{2}{x^2-4} = +\infty, \ \lim_{x\to -2^+} \frac{2}{x^2-4} = -\infty$$

ve

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x^2-4} = -\infty, \ \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x^2-4} = +\infty$$

olduğundan tanıma göre $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları verilen fonksiyonun düşey asimptotlarıdır.

Örnek

•$f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ fonksiyonunun varsa düşey asimptotlarını bulunuz.

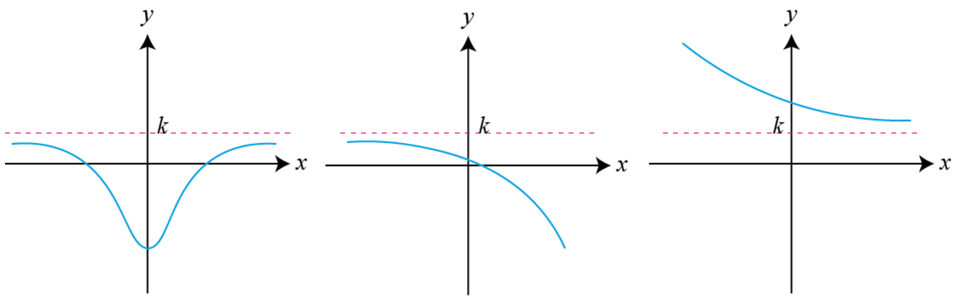
Çözüm: $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ fonksiyonunun paydasını sıfır yapan herhangi bir reel değer olmadığından bu fonksiyonun düşey asimptotu yoktur.

Yatay Asimptot

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = k \ \text{ ve(veya) } \lim_{x\to -\infty} f(x) = k$$

oluyorsa $y = k$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotu denir (Şekil 13.2).



Şekil 13.2

Polinom fonksiyonların yatay asimptotlarının olmayacağına dikkat ediniz.

Örnek

• $f(x) = x^2 + 3x + 2$ fonksiyonunun varsa yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \text{ veya } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

olduğundan tanımı sağlayan k reel sayısı yoktur. Bu sebeple fonksiyonun yatay asimptotu yoktur.

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesine eşit ise en yüksek dereceli terimlerin katsayılarının oranı yatay asimptotu verir. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden küçük ise $y = 0$ doğrusu yatay asimptottur. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise yatay asimptot yoktur.

Örnek

• $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x^2-x}$ fonksiyonunun varsa yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - x} = \frac{1}{2} \text{ ve } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - x} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $y = \frac{1}{2}$ doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotudur.

Örnek

•$f(x) = \frac{x}{x^2-4x+1}$ fonksiyonunun varsa yatay asimptotunu bulunuz.

Çözüm:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4x+1} = 0 \text{ ve } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-4x+1} = 0$$

olduğundan $y = 0$ doğrusu yatay asimptottur.

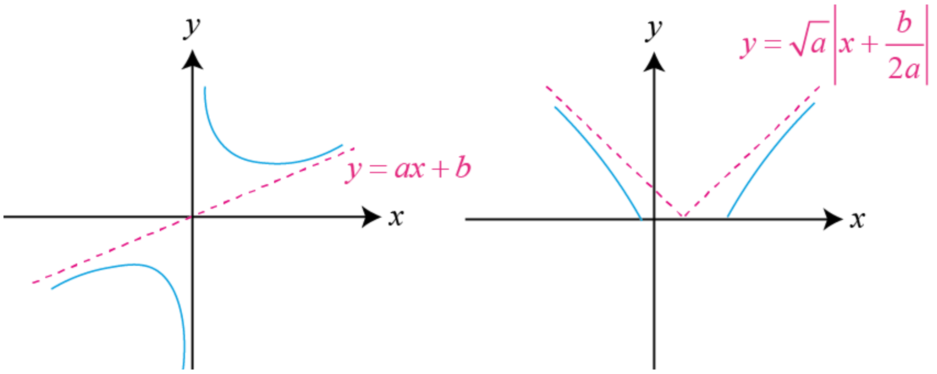
Eğik Asimptot

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a(a \neq 0) \text{ ve } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$$

olacak şekilde a ve b reel sayıları varsa $y = ax + b$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu denir. Burada $x \to -\infty$ durumu için de benzer tanım söz konusudur.

$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ şeklindeki köklü fonksiyonlarda $a < 0$ ise eğik asimptot yoktur. $a > 0$ ise $y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ eğik asimptottur (Şekil 13.3).



Şekil 13.3

Örnek

•$f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 2}$ fonksiyonunun varsa eğik asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ şeklindeki köklü fonksiyonlarda $a > 0$ ise $y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ eğik asimptot olduğundan $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x - 2}$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y = \sqrt{2}|x - 1|$ fonksiyonudur.

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden bir fazla ise $f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu vardır. Polinom bölmesi yapılarak eğik asimptot bulunur.

$P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden bir fazla ise $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun eğik asimptotu vardır.

Örnek

•$f(x) = \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+2}$ fonksiyonunun varsa eğik asimptotunu bulunuz.

Çözüm: Polinom bölmesi yapılarak

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + x^2 - 5 & x^2 + 2 \\ \hline & 3x + 1 \end{array}$$

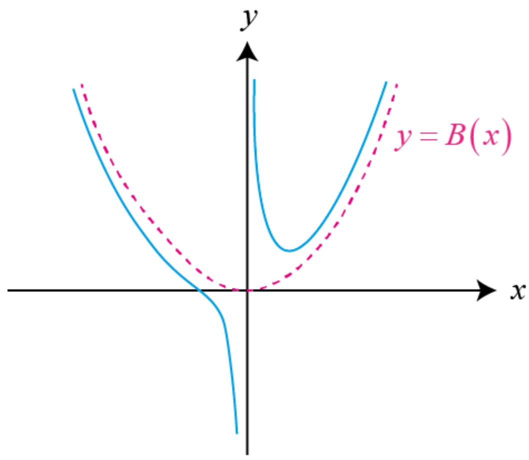
olduğu görülür. Böylece $f(x) = \frac{3x^3+x^2-5}{x^2+2}$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y = 3x + 1$ doğrusudur.

Eğri Asimptot

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom fonksiyon olmak üzere $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ olsun. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden en az iki fazla ise eğri asimptot vardır. Polinom bölmesi yapılarak

$$f(x) = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda ise $y = B(x)$ fonksiyonu eğri asimptotu verir (Şekil 13.4).



Şekil 13.4

$P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden en az iki fazla ise $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun eğri asimptotu vardır.

Örnek

•$f(x) = \frac{x^4-2x^3+2}{x^2+4x+1}$ fonksiyonunun varsa eğri asimptotunu bulunuz.

Çözüm: Polinom bölmesi yapılarak

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 + 2 & x^2 + 4x + 1 \\ \hline & x^2 - 6x + 23 \end{array}$$

olduğu görülür. Böylece $f(x) = \frac{x^4-2x^3+2}{x^2+4x+1}$ fonksiyonunun eğri asimptotu $y = x^2 - 6x + 23$ fonksiyonudur.

Örnek

•$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-3}$ fonksiyonunun tüm asimptotlarını inceleyiniz.

Çözüm:

- $x = -1$ ve $x = 3$ değerleri paydayı sıfır yaparken payı sıfır yapmamaktadır. Bu yüzden $x = -1$ ve $x = 3$ doğruları düşey asimptottur.
- Paydaki $x^2 + 3x - 4$ polinomunun derecesi, paydadaki $x^2 - 2x - 3$ polinomunun derecesine eşit olduğundan bu polinomlardaki x^2 içeren terimlerin katsayılarının oranına göre $y = 1$ doğrusu yatay asimptotu verir.
- Eğik asimptot yoktur.
- Eğri asimptot yoktur.

Bu bölümde bu kadar örnekle yetineceğiz. İlave örnekler için [1-2] çalışmalarından faydalanılabilir.

Grafik Çizimi

Bu kısımda, fonksiyonlar hakkında şimdiye kadar öğrendiğimiz bilgilerin tümünü kullanarak grafiklerinin nasıl çizileceğini öğreneceğiz.

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir.

1. Fonksiyonun tanım kümesi belirlenir.
2. Fonksiyonun (varsa) eksenleri kestiği noktalar bulunur.
3. Fonksiyonun varsa asimptotları bulunur.
4. Fonksiyonun birinci türevi alınarak işareti incelenir.

5. Fonksiyonun ikinci türevi alınarak işareti incelenir (Bazen işlemlerin çok uzamaması için bu kısmı ihmal edebiliyoruz).
6. Elde edilen veriler kullanılarak fonksiyon için değişim tablosu oluşturulur.
   - *$x \to \pm\infty$ için grafik yatay, eğik ya da eğri asimptot ile birlikte hareket eder.*
   - *Tabloda x değerleri küçükten büyüğe doğru yazılır. Türevin işareti incelenirken 5. Bölümde yer alan Tablo 5.1, Tablo 5.2, Tablo 5.3 ve Tablo 5.4 göz önünde bulundurulur.*
   - *Tabloda düşey asimptotlara çift çizgi çekilir ve her çizginin ucuna birer ∞ yazılır. Soldaki sonsuzun işareti çizginin solundaki türevin işareti ile aynı, sağdaki sonsuzun işareti çizginin sağındaki türevin işareti ile ters olur.*
7. Değişim tablosundaki bilgiler koordinat sistemine aktarılır.

Şimdi bu işlemleri bazı örnekler üzerinde ele alalım.

Örnek

•$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ fonksiyonunun değişim tablosunu oluşturarak grafiğini çiziniz.

Çözüm:

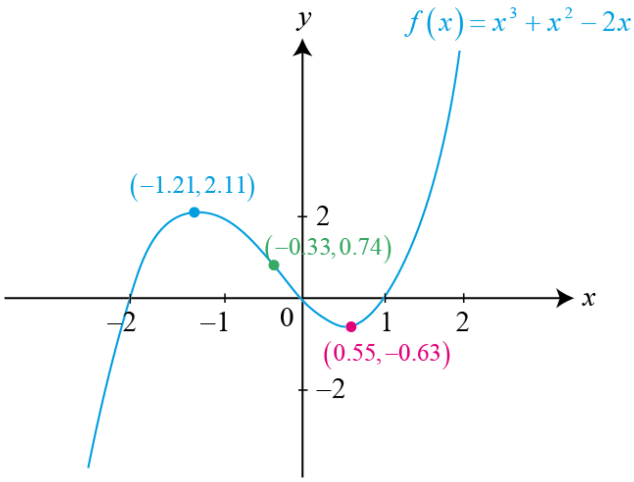
1. Fonksiyonunun tanım kümesi $(-\infty, +\infty)$ aralığı, yani tüm reel sayılardır. $x \to -\infty$ için $f(x) \to -\infty$ ve $x \to +\infty$ için $f(x) \to +\infty$ şeklindedir.
2. $x = 0$ için $y = f(0) = 0$ ve $y = 0$ için $x = -2$, $x = 0$ ve $x = 1$ değerleri bulunur.
3. $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ polinom fonksiyonunun hiçbir asimptotu yoktur.
4. $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ olup $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \cong 0.55$ ve $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \cong -1.21$ değerleri birinci türevi sıfır yapan kritik noktalardır.
5. $f''(x) = 6x + 2$ olup $x = -\frac{1}{3}$ değeri ikinci türevi sıfır yapan büküm noktasıdır.
6. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-2		-1.21		$-1/3$		0		0.55		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2.11	$\searrow$	0.74	$\searrow$	0	$\searrow$	-0.63	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					yerel mak		Büküm Nok.				yerel min				

şeklinde olur.

7. Değişim tablosundaki bilgileri koordinat sistemine aktaralım. Buna göre göre grafik III. bölgeden başlayıp konkav bir şekilde artarak

$(-2,0)$ noktasından geçecek, yine artarak $(-1.21,2.11)$ noktasında maksimum değerini aldıktan sonra yine konkav olarak azalacaktır. $(-1/3,0.74)$ noktasında konkavlıktan konveksliğe geçerek yine azalacak ve $(0,0)$ noktasına gelecektir. Bu noktadan sonra yine azalıp $(0.55,-0.63)$ noktasına gelerek burada minimum değerini alacaktır. Sonra yine konveks olarak artmaya başlayacak $(1,0)$ noktasından geçerek I. bölgede sonsuza gidecektir (Şekil 13.5).



Şekil 13.5

Örnek

•$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

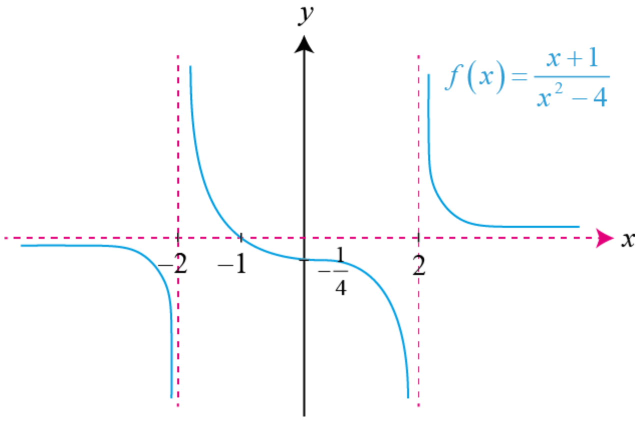
Çözüm:

1. Tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ kümesidir.
2. $x = 0$ için $y = -\frac{1}{4}$ ve $y = 0$ için $x = -1$ olur.
3. Paydayı sıfır yapan $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları düşey asimptotlardır. Paydanın derecesi payın derecesinden büyük olduğundan $y = 0$ doğrusu yatay asimptot olur. Fonksiyon $x \to \pm\infty$ için $y = 0$ yatay asimptotu ile hareket eder.
   Eğik ve eğri asimptot yoktur.
4. $f'(x) = -\frac{x^2+2x+4}{(x^2-4)^2}$ olup $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$ için $f'(x) < 0$ olur. Yani tanım kümesinde $f(x)$ fonksiyonu daima azalandır.
5. İkinci türev incelemelerini ihmal ediyoruz.
6. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$-$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

şeklinde olur.

7. Değişim tablosundaki bilgileri koordinat sistemine aktaralım. Buna göre grafik $x \to -\infty$ için $y = 0$ yatay asimptotu ile başlayacak azalarak $x = -2$ doğrusunun solundan $-\infty$ 'a gidecektir. Sonra $x = -2$ doğrusunun sağında $+\infty$ 'dan başlayıp azalarak $(-1,0)$ noktasından ve $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ noktasından geçtikten sonra $x = 2$ doğrusunun solundan $-\infty$ 'a gidecektir. Sonra $x = 2$ doğrusunun sağında $+\infty$ 'dan başlayıp azalarak $x \to +\infty$ için $y = 0$ yatay asimptotuna ulaşacaktır (Şekil 13.6).



Şekil 13.6

Örnek

• $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

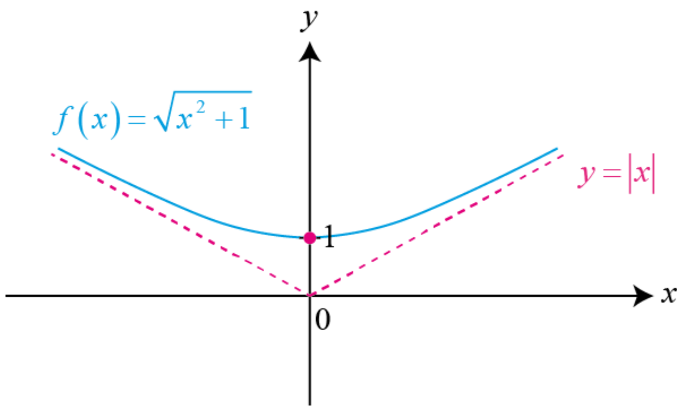
Çözüm:

1. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 > 0$ olduğundan tanım kümesi $\mathbb{R}$ kümesidir.
2. $x = 0$ için $y = 1$ olup $y = 0$ yapan hiçbir x değeri yoktur.
3. Düşey ve yatay asimptot yoktur.
   $y = |x|$ fonksiyonu eğik asimptottur. Fonksiyon $x \to \pm\infty$ için $y = |x|$ eğik asimptotu ile hareket eder.
   Eğri asimptot yoktur.
4. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ olup $x = 0$ türevi sıfır yapan kritik noktadır.
5. İkinci türev incelemelerini ihmal ediyoruz.
6. Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1 mutlak min	$\nearrow$	$+\infty$

şeklinde olur.

7. Değişim tablosundaki bilgileri koordinat sistemine aktaralım. Buna göre grafik $x \to -\infty$ için $y = |x|$ eğik asimptotu ile II. bölgeden başlayacak azalarak $(0,1)$ noktasında minimum değerini aldıktan sonra artacak ve $x \to +\infty$ için $y = |x|$ eğik asimptotu ile I. bölgede sonsuza gidecektir (Şekil 13.7).



Şekil 13.7

Örnek

•$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$ fonksiyonunun değişim tablosunu oluşturarak grafiğini çiziniz.

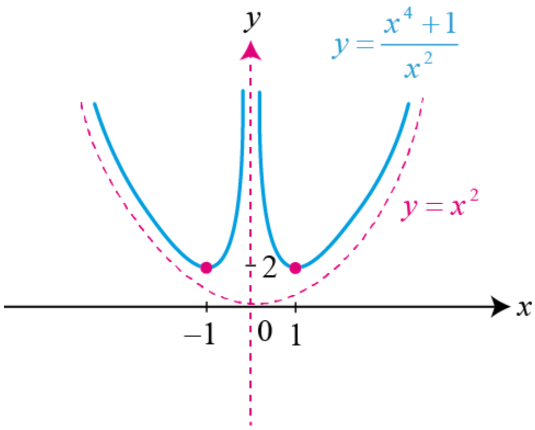
Çözüm:

1. Tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şeklindedir.
2. $x = 0$ için fonksiyon tanımlı olmadığından ve $y = 0$ yapan hiçbir x reel sayısı bulunmadığından grafik eksenleri kesmez.
3. $x = 0$ değeri paydayı sıfır yaptığından $x = 0$ doğrusu düşey asimptottur. Payın derecesi paydanın derecesinden iki fazla olduğundan eğri asimptot söz konusudur. Polinom bölmesi yapılarak bu eğri asimptot $y = x^2$ olarak bulunur. Fonksiyon $x \to \pm\infty$ için $y = x^2$ eğri asimptotu ile hareket eder.
4. $f'(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3} = \frac{2(x^2-1)(x^2+1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$ olup $x = -1$ ve $x = 1$ değerleri türevi sıfır yapan kritik noktadır. $x = 0$ noktası ise türevi tanımsız yapan bir kritik noktadır. Bu noktada fonksiyon da tanımsız olduğundan bu nokta bir extremum nokta olamaz. Sadece türevin işaret değişimi etkiler.
5. İkinci türev incelemelerini ihmal ediyoruz.
6. Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2 yerel min	$\nearrow$	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	2 yerel min	$\nearrow$	$+\infty$

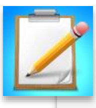
şeklinde olur.

7. Değişim tablosundaki bilgileri koordinat sistemine aktaralım. Buna göre grafik $x \to -\infty$ için $y = x^2$ eğri asimptotu ile II. bölgeden başlayacak azalarak $(-1,2)$ noktasında minimum değerini aldıktan sonra artacak ve $x = 0$ doğrusunun solundan $+\infty$ 'a gidecektir. Sonra $x = 0$ doğrusunun sağında $+\infty$ 'dan başlayıp azalacak $(1,2)$ noktasında minimum değerini aldıktan sonra artacak ve $x \to +\infty$ için $y = x^2$ eğri asimptotu ile I. bölgede sonsuza gidecektir (Şekil 13.8).



Şekil 13.8

Bu bölümde bu kadar örnekle yetineceğiz. İlave örnekler için [3-4] çalışmalarından faydalanılabilir.



Bireysel Etkinlik

- Polinom fonksiyonların niçin asimptotlarının olmadığını bir örnek üzerinde inceleyiniz.

Özet

- Asimptotlar, fonksiyonun belirttiği eğriye sonsuzda teğet olan doğru veya eğrilerdir.
- Dört tip asimptot vardır. Bunlar; düşey asimptot, yatay asimptot, eğik asimptot ve eğri asimptot şeklindedir.
- Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar takip edilir.
  - Fonksiyonun tanım kümesi belirlenir.
  - Fonksiyonun (varsa) eksenleri kestiği noktalar bulunur.
  - Fonksiyonun varsa asimptotları bulunur.
  - Fonksiyonun birinci türevi alınarak işareti incelenir.
  - Fonksiyonun ikinci türevi alınarak işareti incelenir(Bazen işlemlerin çok uzamaması için bu kısmı ihmal edebiliyoruz).
  - Elde edilen veriler kullanılarak fonksiyon için değişim tablosu oluşturulur.
  - Değişim tablosundaki bilgiler koordinat sistemine aktarılır.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^2+2}$ eğrisinin düşey asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\mathrm{x} = \sqrt{2}$
   b) $\mathrm{x} = -\sqrt{2}$
   c) $\mathrm{x} = 2$
   d) $\mathrm{x} = -2$
   e) Düşey asimptot yoktur.

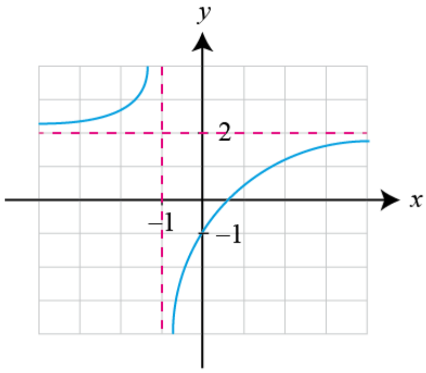
2. $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^2+2}$ eğrisinin yatay asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\mathrm{y} = 2$
   b) $\mathrm{y} = -2$
   c) $\mathrm{y} = 3$
   d) $\mathrm{y} = -3$
   e) Yatay asimptotu yoktur.

3. $f(x) = \frac{4x^2+1}{x-2}$ eğrisinin eğik asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\mathrm{y} = -4\mathrm{x} + 8$
   b) $\mathrm{y} = 4\mathrm{x} + 8$
   c) $\mathrm{y} = 4\mathrm{x} + 2$
   d) $\mathrm{y} = 4\mathrm{x} - 2$
   e) Eğik asimptot yoktur.

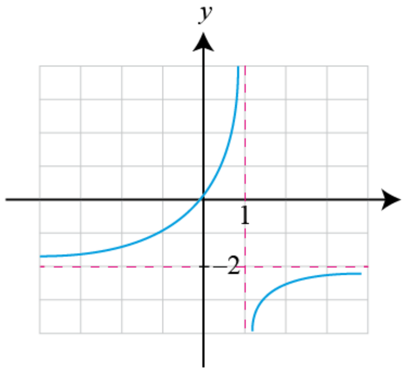
4. $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-1}$ eğrisinin eğri asimptotu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1$
   b) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 1$
   c) $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 1$
   d) $\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1$
   e) Eğri asimptot yoktur.

5. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

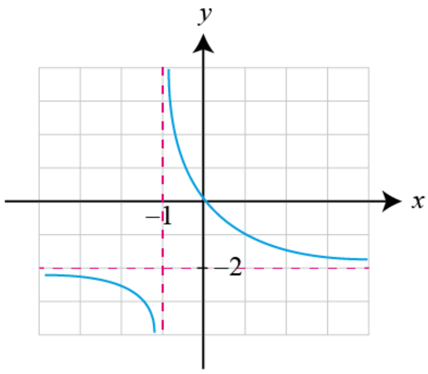
a)



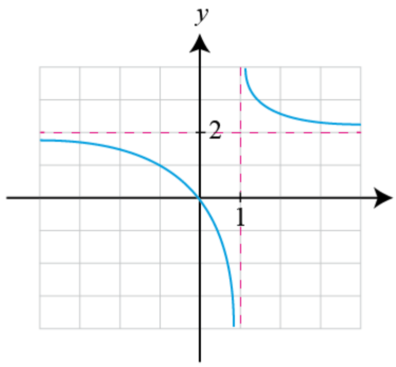
b)



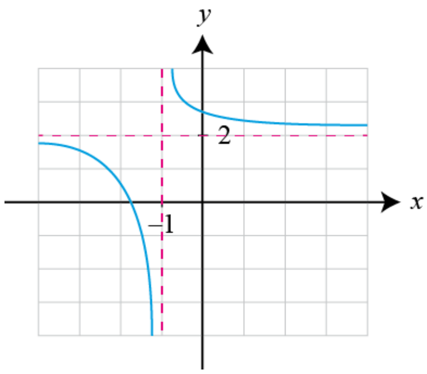
c)



d)

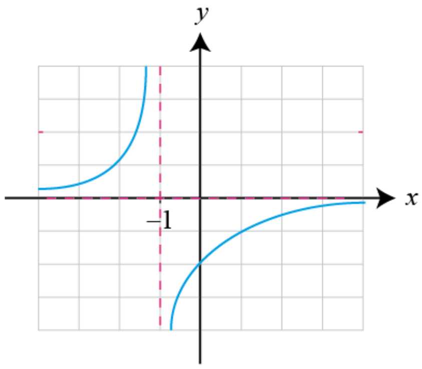


e)

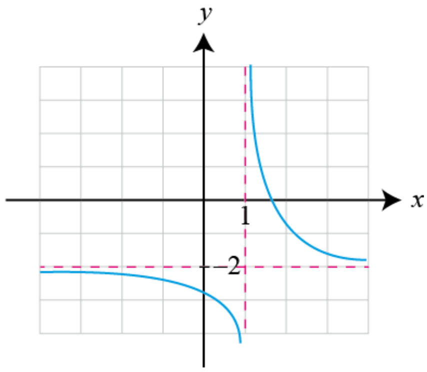


6. $f(x)=\frac{x-1}{3x-6}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

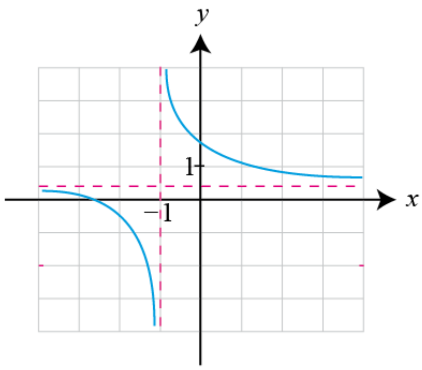
a)



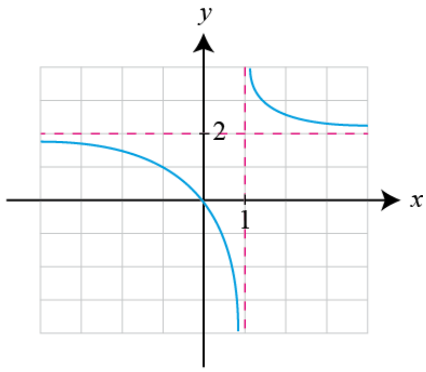
b)



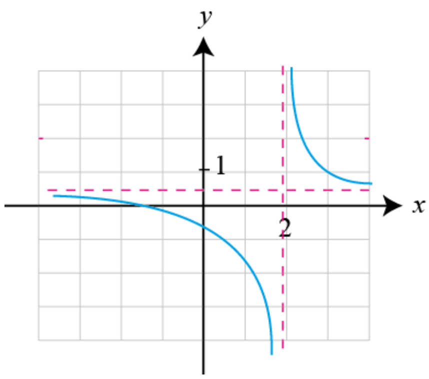
c)



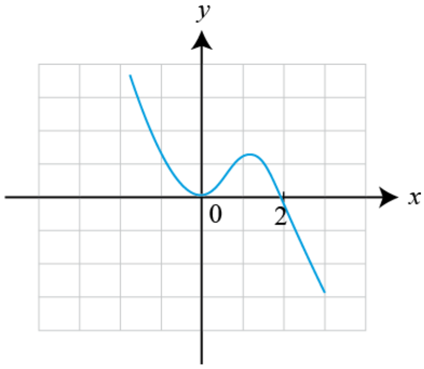
d)

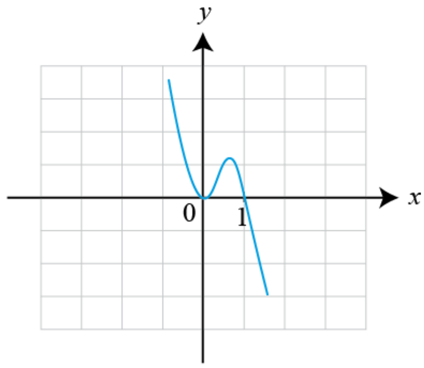


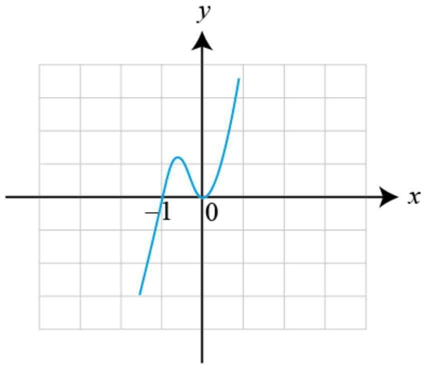
e)

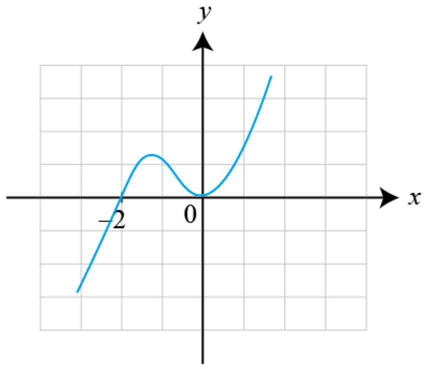


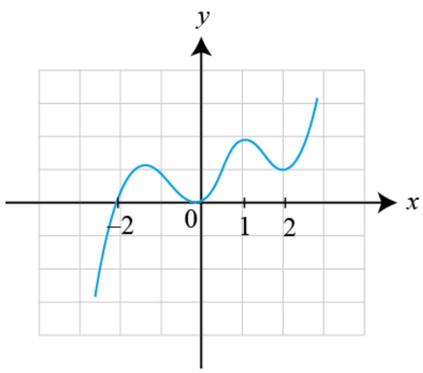
7. $f(x) = x^3 + 2x^2$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

a)


b)


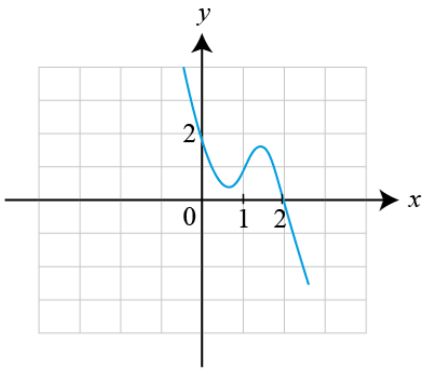
c)


d)


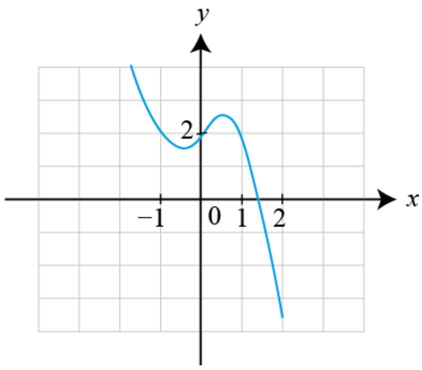
e)


8. $f(x) = 2 - x^3 + x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

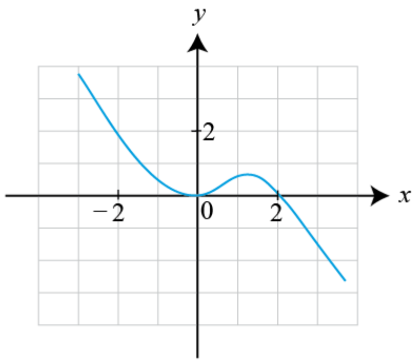
a)



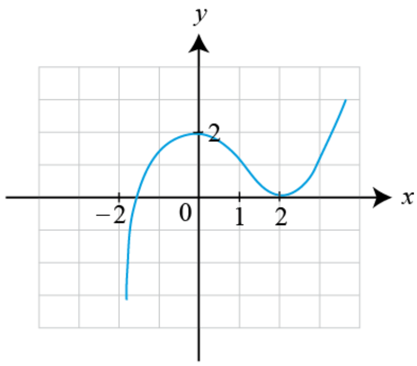
b)



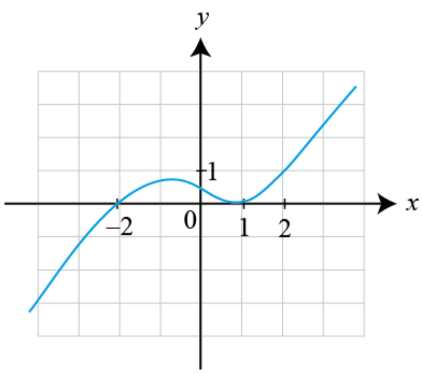
c)



d)

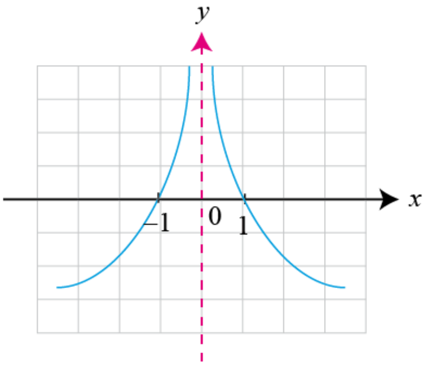


e)

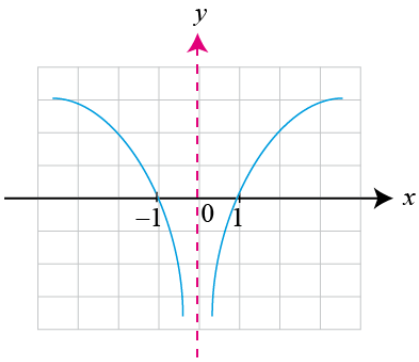


9. $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

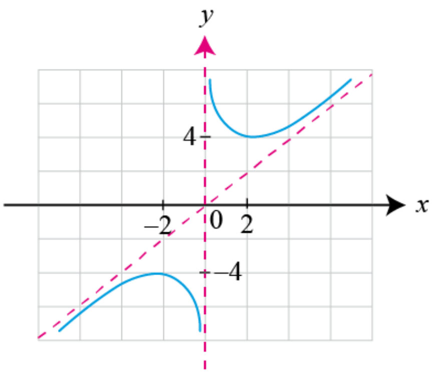
a)



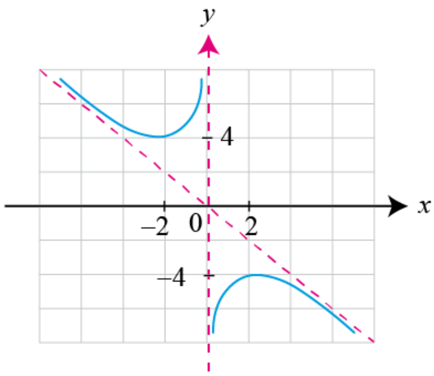
b)



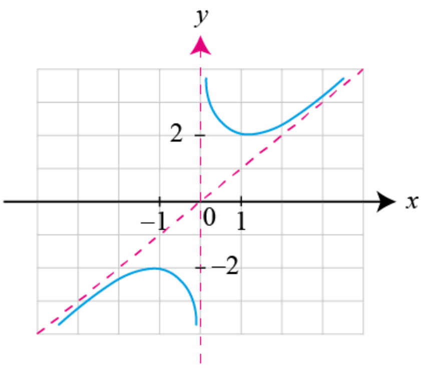
c)



d)

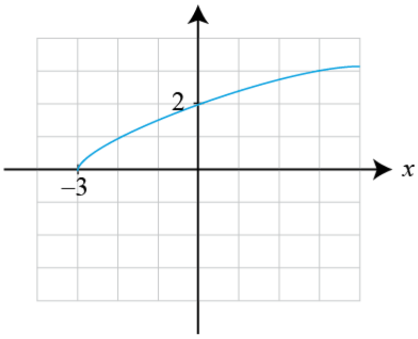


e)

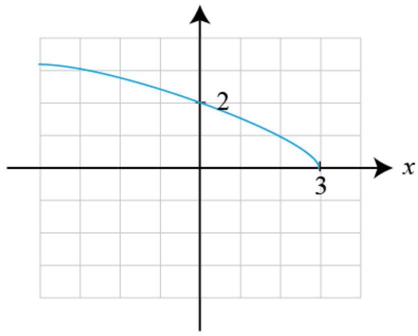


10. $f(x) = \sqrt{x+1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

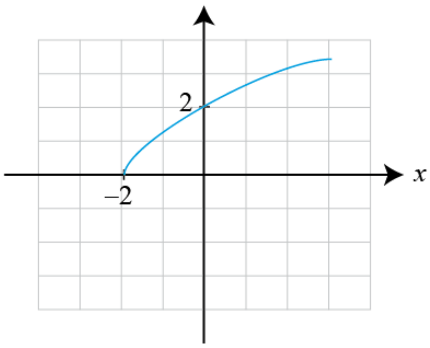
a)



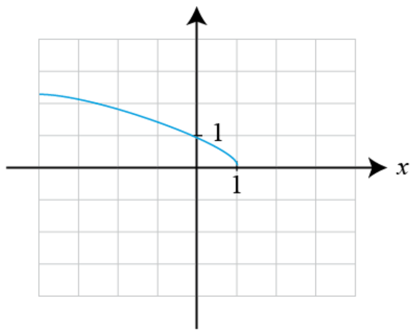
b)



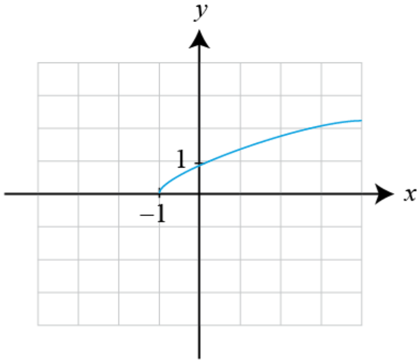
c)



d)



e)



Cevap Anahtarı

1.e, 2.c, 3.b, 4.a, 5.a, 6.e, 7.d, 8.b, 9.c, 10.e

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Kadıoğlu, E. ve Kamali M., (2013). Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi. ISBN: 978-975-8151-57-8. 8. Baskı. Eylül-2013. Erzurum.

[2] Balcı, M., (2012). Genel Matematik-1. Sürat Üniversite Yayınları. Çağlayan A.Ş., TS EN ISO 9001:2008 Ser Nu.: 300-01. Eylül 2012.

[3] Bayraktar, M., (2000). Analiz-I. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No: 166 Vipaş A.Ş. Yayın No: 42. ISBN: 975-564-108-4. Bursa.

[4] Cangül, İ. N., (2013). Matematik Cilt I, Calculus Early Transcendentals, Dennis G. ZILL-Warren S. WRIGHT. Çeviri Editörü: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL. Yayın No: 728. Matematik-İstatistik No: 042. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti. Sertifika No 20779. ISBN: 978-605-133-629-9. 4. Basımdan Çeviri, Eylül 2013.

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİ (OPTİMİZAYSON)

Atatürk Üniversitesi
Açıköğretim Fakültesi

İÇİNDEKİLER

MATEMATİK I

Prof. Dr.
Abdullah KOPUZLU

HEDEFLER

- Bu üniteyi çalıştıktan sonra;
  - Maksimum ve minimum problemlerinin (Optimizasyon problemlerinin) ne anlam ifade ettiğini öğreneceksiniz.
  - Maksimum ve minimum problemlerini tanıyacaksınız.
  - Bu problemlerin nasıl çözüldüğü hakkında bilgi sahibi olacaksınız.

ÜNİTE

14

Maksimum ve Minimum Problemleri (Optimizasyon)

- Maksimum ve minimum problemlerini tanımak
- Maksimum ve minimum problemlerinin nasıl çözülebileceğini anlamak
- Maksimum ve minimum problemlerini çözmek
- İktisat ile ilgili maksimum ve minimum problemleri

GİRİŞ

Matematik tarihi boyunca, maksimum ve minimum problemleri önemli bir rol oynamıştır. Matematik ve fiziğin çeşitli dallarında ve diğer bilim dallarında birçok güzel ve önemli problem ortaya çıkmıştır. Euclid, Arşimed, Bernoullis, Newton gibi birçok bilim adamı bu somut sorunlara çözüm arayışında yer almıştır. Çözümler, teorinin gelişimini teşvik etmiş ve sonuç olarak bu problemlerin çözümünü mümkün kılan teknikler ortaya konmuştur.

Matematikçiler yaklaşık yirmi beş asır önce bu problemleri çalışmaya başlamıştır. Problemlerin çözümlerine ve genel metotların araştırılmasına da yaklaşık 300 yıl önce başlanmıştır.

Optimizasyon, bir sistemdeki kaynakların (işgücü, zaman, kapital, süreçler, hammaddeler, kapasite, ekipman gibi) en verimli şekilde kullanılarak belirli amaçlara (maliyet enazaltılması, kâr ençoklanması, kapasite kullanımının enyükseltilmesi ve verimliliğin ençoklanması gibi) ulaşmayı sağlayan bir teknoloji olarak tanımlanmaktadır.

Optimizasyon bir sistemdeki kaynakların en verimli şekilde kullanılarak belirli amaçlara ulaşmayı sağlayan bir teknoloji olarak tanımlanmaktadır.

Optimizasyon teknolojisi, karar verme süreçlerini hızlandırmakta ve karar kalitesini artırmakta kullanılarak gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin etkin, doğru ve gerçek zamanlı çözümünde yararlanılmaktadır.

Optimizasyonda, modelleme ve çözümleme iki önemli bileşen olarak nitelendirilmektedir. Modelleme gerçek yaşamda karşılaşılan problemin matematiksel olarak ifade edilmesi, çözümleme ise bu modeli sağlayan en iyi çözümün elde edilmesini kapsamaktadır. Optimizasyon teknolojisinin gelişiminde araştırmacılar öncelikli olarak modellemeyle ilgilenmişlerdir.[1]

Günümüzde araştırmacılar, kullanıcılar, şirketler, kamu kurum ve kuruluşları planlama ve optimizasyon problemleri ile karşı karşıya kalmaktadır. Bu tür problemlerde, farklı karar alternatifleri vardır ve bunlardan biri seçilmektedir. Mevcut alternatiflerden biri, bir değerlendirme kriterine sahip kullanıcı veya şirket üzerinde daha etkili olur. Bazen bazı kısıtlamalar ile alternatiflerin sayısı azaltılabilir.

İnsanın bulunduğu her yerde, bir çok alanda ve disiplinde karşılaşılan optimizasyon problemlerinde (maksimum ve minimum problemleri), örneğin iktisatta, maliyetin azaltılması, kârın ve gelirin maksimize edilmesi, kapasitenin ve verimliliğin artırılması gibi amaçlar için en iyi (optimal) yada en iyiye yakın çözümler araştırılmaktadır. Bu problemler istenen hedeflere ulaşmak için sınırlı kaynakların etkin kullanımı ile ilgilidir. Dolayısıyla var olan mümkün alternatiflerden amaca uygun olan, en iyi alternatif göz önüne alınmaktadır.[2]

Bu kısımda, ilk olarak maksimum minimum probleminin nasıl çözüleceği anlatılıp, daha sonra bu problemlerle ilgili örnekler verilecektir. Son kısımda ise deneme soruları ve değerlendirme testi ile konunun pekiştirilmesi sağlanacaktır.

MAKSİMUM ve MİNİMUM PROBLEMLERİ (OPTİMİZASYON)

Bu bölümde, *optimizasyon* kavramı tanıtılarak çeşitli örnekler verilecektir. Optimizasyon problemi maksimum ve minimum problemi olarak da adlandırılır.

Bu problemlerde çözüm, genellikle biri diğerini tamamlayan farklı adımlarda yapılır. Bu adımlar genel olarak, problemi tanıma ve tanımlamak, çözüm modeli oluşturmak ve bu modeli uygulayarak problemi çözmek olarak ifade edilir. Dolayısıyla optimizasyonda süreç genel olarak modelleme ve çözümleme olarak iki bileşene sahiptir.

Optimizasyon, en iyiyi yani optimum olanı aramak olarak ifade edildiğinden optimizasyonun kullanılmadığı bir bilim dalı hemen hemen yok gibidir.

Bir optimizasyon probleminde ve planlamada genel olarak aşağıdaki adımlar göz önüne alınır:

- Problemi tanımak
- Problemi tanımlamak
- Problem için bir model oluşturmak
- Modeli çözmek
- Çözümü onaylamak
- Çözümü uygulamak

Bir optimizasyon probleminin (maksimum ve minimum problemi) çözümü için aşağıdaki yol uygulanacaktır [3] :

- Maksimum ve minimum olması istenen çokluğun fonksiyonu oluşturulur (problemin matematiksel modeli).
- Eğer oluşturulan fonksiyon birden fazla değişken içeriyorsa, verilen şartlar veya kısıtlamalar kullanılarak bu fonksiyon tek değişkene indirgenir.
- Elde edilen tek değişkenli fonksiyonun türevi alınarak kritik değer (veya değerler) bulunur.
- Bulunan bu kritik değerin (veya değerlerin) maksimum veya minimum olduğu türev tablosu ile gösterilir.

İlk olarak bazı basit örneklerle maksimum ve minimum problemlerini tanımaya çalışalım [4, 5].

Örnek

- Toplamları 100 olan öyle pozitif iki sayı bulunuz ki bu sayıların çarpımları maksimum olsun.

Çözüm: Bu sayılar x ve y olmak üzere, toplamları $x + y = 100$ olarak verilmiştir. Çarpımlarının maksimum olması istendiğine göre, matematiksel modeli $A = x.y$ olarak yazılır. Bu fonksiyon iki değişkene bağlı olduğundan $x + y = 100$. kısıtlayıcı şartı kullanılarak tek değişkene indirilmelidir. Burada y değişkeni yerine

$y = 100 - x$ alınırsa, A fonksiyonu $A = x.(100 - x) = 100x - x^2$ şeklini alır. Bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alındığında,

$$A' = 100 - 2x$$

bulunur. $A' = 0$ eşitliğinden,

$$A' = 100 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50$$

elde edilir.

x		50	
A'	+ + + +		- - - -
A	↗		↘

Yukardaki işaret tablosundan da görüldüğü gibi $x = 50$ de maksimum vardır. O hâlde istenilen sayılar $x = 50$ ve $x + y = 100$ eşitliğinden de $y = 50$ bulunur. Maksimum (optimum) değer ise $A = x.y = 50.50 = 2500$ olarak elde edilir.

Optimizasyon, "En İyileme" anlamında kullanıldığından her zaman için hedeflenen sonuç, optimizasyon teknikleri kullanılarak ulaşılan sonuçtur.

Örnek

- Toplamları 20 olan öyle iki sayı bulunuz ki bu sayıların kareleri toplamı minimum olsun.

Çözüm: İstenilen sayılar x ve y olarak alındığında $x + y = 20$ olur. Minimum olması istenen fonksiyon $A = x^2 + y^2$ şeklindedir. İki değişkene bağlı olarak verilen bu fonksiyonda y değişkeni yerine $x + y = 20$ ön şartından dolayı $y = 20 - x$ alınırsa $A = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ elde edilir. Bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alınarak,

$$A' = 4x - 40$$

bulunur. Bu türev sıfıra eşitlenerek,

$$A' = 4x - 40 = 0 \Longrightarrow 4x = 40 \Longrightarrow x = 10$$

elde edilir.

x		10	
A'	- - - -		+ + + +
A	↘		↗

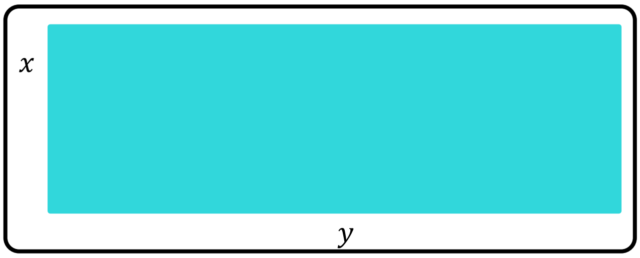
Yukardaki işaret tablosundan da görüldüğü gibi $x = 10$ da minimum vardır. O hâlde istenilen sayılar $x = 10$ ve $x + y = 20$ eşitliğinden de $y = 10$ bulunur.

Minimum (optimum) değer ise $A = x^2 + y^2 = 100 + 100 = 200$ olarak elde edilir.

Örnek

•Çevresi 200 cm olan dikdörtgenler arasında alanı maksimum olanının kenar uzunluklarını bulunuz.

Çözüm:



Şekil.14.1.

Optimizasyon problemlerinde, *uzunluk, alan* ve *hacim* gibi geometrik kavramların maksimize ve minimize edilmesi isteniyorsa, bu kavramlarla ilgili formüllerin bilinmesi gerekir.

Şekil 14.1' de görüldüğü gibi dikdörtgenin kenar uzunlukları x ve y olsun. Bu durumda dikdörtgenin kenar uzunlukları toplamı $2x + 2y = 200 \Longrightarrow x + y = 100$ olur. Ayrıca dikdörtgenin alanı A ile gösterilirse $A = x.y$ maksimum olması istenen fonksiyon olur. İki değişkene bağlı bu fonksiyonda y değişkeni yerine $x + y = 100$ eşitliğinden $y = 100 - x$ alınırsa,

$$A = x.(100 - x) = 100x - x^2$$

tek değişkenli fonksiyonu elde edilir. A fonksiyonunun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$A' = 100 - 2x$$

bulunur. Burada $A' = 0$ dan hareketle,

$$100 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 100 \Longrightarrow x = 50$$

elde edilir.

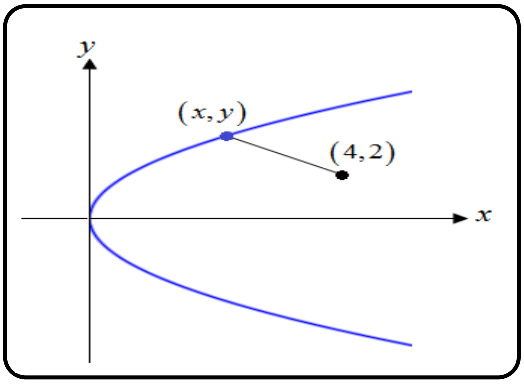
x		50	
A'	+ + + +		- - - -
A	↗		↘

İşaret tablosundan $x = 50$ de maksimum olduğu görülür. O hâlde dikdörtgenin boyutları, $x = 50$ ve $y = 100 - x$ eşitliğinden $y = 50$ bulunmuş olur. (Bir kare olduğu görülür). Maksimum alan ise 2500 cm^2 dir.

Örnek

•Düzlemde$(4,2)$ noktasının $y^2 = 8x$ eğrisine (parabolüne) olan en yakın uzaklığını bulunuz.

Çözüm:



Şekil.14.2.

Düzlemde (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları arasındaki uzunluğu bulmak için

$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

formülü kullanılır.

Şekil 14.2' de verilen eğri üzerindeki $(4,2)$ noktasına en yakın nokta bulunursa, bu problem çözülmüş olur. $y^2 = 8x$ eğrisi üzerindeki bu nokta (x, y) olsun. $(4,2)$ ile (x, y) noktası arasındaki uzaklık minimum olması istenen fonksiyonu verir. Bu fonksiyon (düzlemde iki nokta arasındaki uzaklık formülünden),

$$l = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

şeklinde yazılır. Burada karekökün içini minimum yapan değer kendisini de minimum yapacağından kök kaldırılarak işlem yapılabilir. Dolayısıyla,

$$l^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2$$

yazılabilir. İki değişkene bağlı olan bu fonksiyonda x değişkeni yerine $y^2 = 8x$ den $x = \frac{y^2}{8}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} l^2 &= \left(\frac{y^2}{8} - 4\right)^2 + (y-2)^2 \\ &= \frac{y^4}{64} - y^2 + 16 + y^2 - 4y + 4 \\ &= \frac{y^4}{64} - 4y + 20 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu fonksiyonun y değişkenine göre türevi alındığında,

$$l^{2\prime} = \frac{y^3}{16} - 4$$

bulunur. $l^{2\prime} = 0$ eşitliğinden,

$$\frac{y^3}{16} - 4 = 0 \Rightarrow y^3 = 64 \Rightarrow y = 4$$

elde edilir.

y		4	
l'	- - - -		+ + + +
l	↘		↗

Yukardaki işaret tablosundan görüldüğü gibi $y = 4$ de minimum vardır. $y = 4$ için $x = \frac{y^2}{8}$ eşitliğinden $x = 2$ bulunur. Böylece $(4,2)$ noktasına eğri üzerindeki en yakın nokta $(2,4)$ noktasıdır. O hâlde istenen minimum uzaklık

$$l = \sqrt{(2-4)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

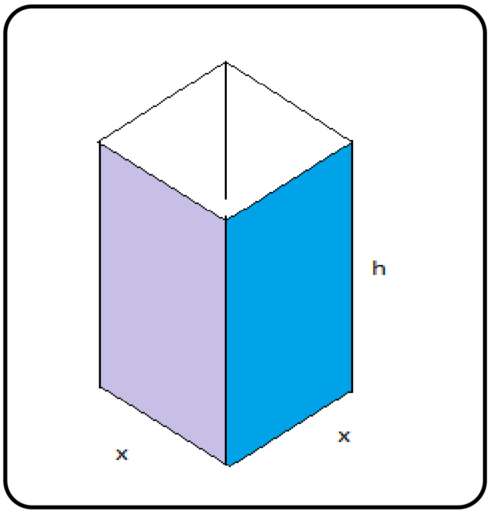
olur.

Örnek

•Peynir kutusu imal eden bir firma bir ürün için 108 cm^3'lük hacimli üstü açık kare prizma şeklinde kutular üretmeyi planlamaktadır. Bu kutuların yüzey alanının minimum olması için boyutları ne olmalıdır?

Taban kenar uzunluğu x ve yüksekliği h olan bir *kare prizmasının hacmi* $V = x^2.h$ ve yüzey alanı ise $A = 4x.h + x^2$'dir.

Çözüm:



Şekil.14.3.

Şekil 14.3' te verilen, yüzeyinin minimum olması istenen kutunun taban kenar uzunluğu x ve yüksekliği h olmak üzere hacmi $V = x^2.h = 108$ olarak verilmiştir. Minimum olması istenen fonksiyon $A = 4x.h + x^2$ şekilinde iki değişkenlidir. Burada h değişkeni yerine verilen $x^2.h = 108$ eşitliğinden $h = \frac{108}{x^2}$ alınırsa,

$$A = 4x.h + x^2 = 4x.\frac{108}{x^2} + x^2 = \frac{432}{x} + x^2$$

bulunur. Bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$A' = -\frac{432}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 432}{x^2}$$

$$A' = \frac{2x^3 - 432}{x^2} = 0 \Longrightarrow 2x^3 - 432 = 0 \Longrightarrow x^3 = 216 \Longrightarrow x = 6$$

bulunur.

x		6	
A'	- - - -		+ + + +
A	↘		↗

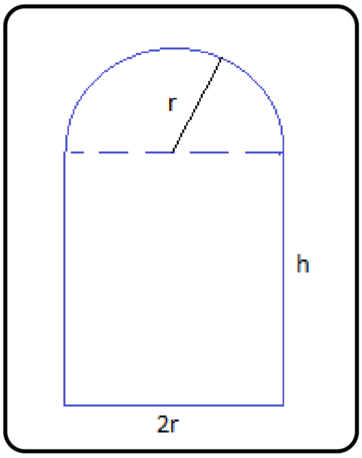
Yukardaki işaret tablosundan görüldüğü gibi $x = 6$ da minimum vardır. $x = 6$ için, $h = \frac{108}{x^2}$ eşitliğinden $h = 3$ bulunur.

Maksimim minimum problemleri, günlük hayatta karşılaşılan birçok problemin çözümünde, etkili olarak kullanılır.

Örnek

• 12 m uzunluğundaki bir malzemeden altı dikdörtgen ve üstü yarım daire olacak şekilde bir pencere imal edilmek isteniyor. En fazla ışığı alması için bu pencerenin boyutları ne olmalıdır?

Çözüm:



Şekil.14.4.

Şekli yukarıdaki Şekil 14.4' teki gibi olan pencerelerden en fazla ışığı içeri alan, en büyük alana sahip olanıdır. Dolayısıyla maksimum olması istenen fonksiyon,

$$A = h.2r + \frac{1}{2}\pi r^2$$

şeklinde iki değişkenli olarak yazılır. Burada dairenin alanı πr^2'dir. Kullanılacak malzeme $12\ m$ olduğuna göre, pencerenin çevre uzunluğu $2h + 2r + \pi r = 12$

olur. Bu eşitlikten elde edilen $h = 6 - r - \frac{\pi r}{2}$ ifadesi yukardaki fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$A = \left(6 - r - \frac{\pi r}{2}\right) 2r + \frac{1}{2}\pi r^2 = 12r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 12r - \left(2 + \frac{1}{2}\pi\right) r^2$$

bulunur. A fonksiyonunun r değişkenine göre türevi alındığında,

$$A' = 12 - (4 + \pi) r$$

elde edilir. $A' = 0$ olmak üzere $12 - (4 + \pi) r = 0 \Longrightarrow r = \frac{12}{4+\pi}$ kritik değeri bulunur.

r		$\frac{12}{4+\pi}$	
A'	+ + + +		- - - -
A	↗		↘

İşaret tablosundan $r = \frac{12}{4+\pi}$ de maksimum olduğu görülür. O hâlde pencerenin yüksekliği de $h = 6 - r - \frac{\pi r}{2} = 6 - \frac{12}{4+\pi} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{12}{4+\pi}\right) = \frac{12}{4+\pi}$ olarak bulunur.

Şimdi de iş ve iktisatla ilgili bazı problemleri tanıtıp çözümlerini bulmaya çalışalım. İktisadi problemlerde x ürün miktarı olmak üzere, toplam maliyet fonksiyonu $C(x)$, toplam gelir fonksiyonu $R(x)$, talep fonksiyonu $p(x)$ ve toplam kâr fonksiyonu ise $P(x)$ ile gösterilecektir. Burada toplam kâr fonksiyonu $P(x) = R(x) - C(x)$ ve toplam gelir fonksiyonu ise $R(x) = x.p(x)$ şeklindedir.

İş dünyasında çözümü aranan bir çok problemin matematik modellemesi yapıldıktan sonra, bu problemlerin çözümü için *optimizasyon* etkin olarak kullanılır.

Örnek

- Bir teknomarkette bir ayda herbiri 350 birim liradan 200 adet fotoğraf makinası satılmaktadır. Eğer %10 indirim yapılırsa 20 adet fazla ürün satılacağı düşünülmektedir. Bu ürün için talep ve gelir fonksiyonlarını yazarak, gelirin maksimum olması için indirimin ne kadar olacağını bulunuz.

Çözüm: İndirim yapıldığında bir ayda satılacak olan ürün sayısı x olsun. Bu durumda aylık satış fazlası $x - 200$ olur. Her 20 birimlik satış artışı için, fiyat %10 azalır. Dolayısıyla her bir ilave birim satışta fiyattaki azalma $\frac{1}{20} \times 10 = \frac{1}{2}$ olacaktır. Böylece talep fonksiyonu,

$$p(x) = 350 - \frac{1}{2}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

ve gelir fonksiyonu ise,

$$R(x) = x.p(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$R'(x) = 450 - x$$

elde edilir. Burada $R'(x) = 0$ dan $450 - x = 0 \Longrightarrow x = 450$ kritik değeri bulunur.

x		450	
A'	+ + + +		- - - -
A	↗		↘

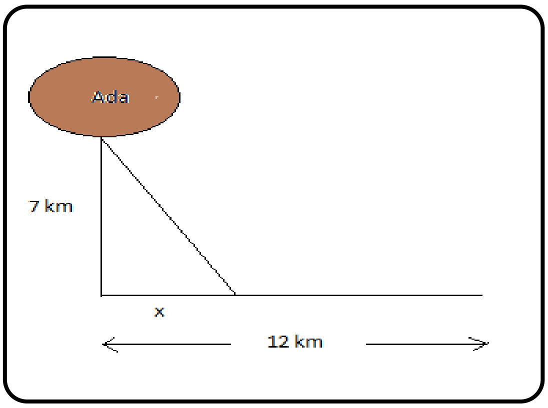
İşaret tablosundan $x = 450$ de maksimum olduğu görülür. Bu değer, talep fonksiyonu olan $p(x) = 450 - \frac{1}{2}x$'de yerine yazılırsa karşılık gelen fiyat,

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}450 = 450 - 225 = 225$$

şeklinde bulunur. İndirim ise $350 - 225 = 125$ olur. Böylece kazancı artırmak için mağazanın 125 birim lira indirim sunması gerekmektedir.

Örnek

• Bir telefon şirketi kıyıdan 7 km uzağındaki bir adaya telefon teli çekecektir. Kıyı boyunca km başına 200 birim lira ve deniz altında ise km başına 300 birim lira maliyet tutmaktadır. Kıyı uzunluğu 12 km olduğunda adaya en az maliyetle ne kadar tel çekilmelidir.



Şekil.14.5.

Çözüm: $C(x)$ maliyet fonksiyonunu göstermek üzere, minimize olması istenen fonksiyon, yukarıdaki şekil göz önüne alınarak,

$$C(x) = 300\sqrt{x^2 + 49} + 200(12 - x)$$

şeklinde oluşturulur. Bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$C'(x) = \frac{300x}{\sqrt{x^2+49}} - 200$$

bulunur. $C'(x) = 0$ eşitliğinden

$$\frac{300x}{\sqrt{x^2+49}} - 200 = 0 \Longrightarrow 3x = 2\sqrt{x^2+49} \Longrightarrow 9x^2 = 4x^2 + 196$$

elde edilir. Buradan $5x^2 = 196 \Longrightarrow x = \sqrt{39{,}2}$ kritik değeri bulunur.

x		$\sqrt{39{,}2}$	
C'	- - - -		+ + + +
C	↘		↗

İşaret tablosundan görüleceği gibi $x = \sqrt{39{,}2}$ de minimum vardır. O hâlde minimum maliyetle çekilecek tel uzunluğu,

$$l = 12 - x + \sqrt{x^2+49}$$

eşitliğinden, yaklaşık olarak

$$l = 12 - \sqrt{39{,}2} + \sqrt{39{,}2+49} \approx 15{,}1 \text{ km}$$

şeklinde bulunur.

Örnek

•Bir ürün için kâr fonksiyonu $\mathrm{P}(x) = -3x^2 + 6x + 11$ olarak verilsin. Minimum kâr sağlayan ürün miktarını bularak minimum kârı yazınız.

Çözüm: Kâr fonksiyonu,

$$P(x) = -3x^2 + 6x + 11$$

olduğundan bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$P'(x) = -6x + 6$$

bulunur. $P'(x) = 0$ eşitliğinden $-6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ kritik değeri elde edilir.

x		1	
P'	- - - -		+ + + +
P	↘	14	↗

Yukardaki işaret tablosundan görüldüğü gibi, $x = 1$'de minimum kâr vardır. Dolayısıyla, sağlanan minimum kâr da,

$$P(x) = -3x^2 + 6x + 11 \Longrightarrow P(1) = -3.1^2 + 6.1 + 11 = 14$$

birim liradır.

Örnek

- Bir firmanın bir ürünü için talep fonksiyonu $p(x) = 100 - 0{,}001x$ ve maliyet fonksiyonu da $C(x) = 50x + 10000$ olarak belirlenmiştir. Kârın maksimum olması için ürün miktarı ne olmalıdır? Bu durumda toplam kâr ne olur?

Çözüm: Toplam gelir fonksiyonu,

$$R(x) = x.p(x) = x.(100 - 0{,}01x) = 100x - 0{,}01x^2$$

şeklindedir. Böylece toplam kâr fonksiyonu da,

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 100x - 0{,}01x^2 - (50x + 10000) \\ &= -0{,}01x^2 + 50x - 10000 \end{aligned}$$

olur. Bu fonksiyonun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$P'(x) = -0{,}02x + 50$$

bulunur. $P'(x) = 0$ eşitliğinden $-0{,}02x + 50 = 0 \Longrightarrow x = \frac{50}{0{,}02} = 2500$ kritik değeri elde edilir.

x		2500	
P'	+ + + +		- - - -
P	↗	52500	↘

Yukardaki işaret tablosundan, $x = 2500$ ürün için maksimum kârın olduğu görülür. Dolayısıyla toplam kâr,

$$P'(2500) = -0{,}01(2500)^2 + 50(2500) - 10000 = 52500$$

birim lira olarak bulunur.

Örnek

- Bir kamyon şirketi, bir kamyonun bir saatlik çalışma için toplam maliyet fonksiyonunu $C(x) = 0{,}0001x^2 - 0.01x + 112$ olarak belirlemiştir. Burada x kamyonun hareket hâlindeki hızıdır. Bu durumda toplam maliyetin minimum olduğu bir saatlik ortalama hızını bularak Kamyonun bir saatlik toplam maliyetini yazınız.

Çözüm: $C(x) = 0.0001x^2 - 0{,}01x + 112$ toplam maliyet fonksiyonunun x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$C'(x) = 0{,}0002x - 0{,}01$$

bulunur. $C'(x) = 0$ eşitliğinden, $0{,}0002x - 0{,}01 = 0 \Longrightarrow x = \frac{0{,}01}{0{,}0002} = 50$ kritik değeri elde edilir.

x		50	
C'	- - - -		+ + + +
C	↘	111,75	↗

İşaret tablosundan $x = 50$ de minimum olduğu görülür. O hâlde kamyonun hızı 50’dir. Kamyonun bir saatlik toplam maliyeti de 111,75 birim liradır.

Bireysel Etkinlik

- Çeşitli optimizasyon problemi örnekleri tasarlayarak bu problemlerin çözümünü araştırınız.

Bireysel Etkinlik

- Uzunluğu "l" olan bir iple çevrelenen maksimum alanlı bir dikdörtgenin boyutlarının nasıl seçilmesi gerektiği problemi üzerinde düşününüz.

Özet

- Bir optimizasyon probleminde ve planlamada genel olarak aşağıdaki adımlar göz önüne alınır:
- Problemi tanımak
- Problemi tanımlamak
- Problem için bir model oluşturmak
- Modeli çözmek
- Çözümü onaylamak
- Çözümü uygulamak
- Optimizasyon probleminin (maksimum ve minimum problemi) çözümü için aşağıdaki yol takip edilmiştir:
- Maksimum veya minimum olması istenen çokluğun fonksiyonu oluşturulur (problemin matematiksel modeli).
- Eğer oluşturulan fonksiyon birden fazla değişken içeriyorsa, verilen şartlar veya kısıtlamalar kullanılarak bu fonksiyon tek değişkene indirgenir.
- Elde edilen tek değişkenli fonksiyonun türevi alınarak, kritik değer veya değerler bulunur.
- Bulunan bu kritik değer veya değerlerin maksimum veya minimum olup olmadığı türev tablosu ile gösterilir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. Toplamları 100 çarpımları maksimum olan iki pozitif sayı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 40 ve 60
   b) 30 ve 70
   c) 50 ve 50
   d) 45 ve 55
   e) 49 ve 51

2. x ve y sayılarının toplamları $60'$tır. $x.y^2$'ni maksimum değer alabilmesi için x ve y sayıları kaç olmalıdır?
   a) 15 ve 45
   b) 20 ve 40
   c) 25 ve 35
   d) 10 ve 40
   e) 30 ve 30

3. Bir kenarı l uzunluğunda olan bir kare içine çizilebilen ve köşeleri bu karenin kenarları üzerinde bulunan en küçük alanlı karenin kenar uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $\frac{\sqrt{2}}{3}l$
   b) $\sqrt{2}l$
   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}l$
   d) $2l$
   e) $3l$

4. $x^2 - y^2 = 1$ eğrisi üzerindeki noktalardan düzlemdeki $(4,0)$ noktasına en yakın olanları aşağıdakilerden hangisidir?
   a) $(\sqrt{3}, 2)$ ve $(\sqrt{3}, -2)$
   b) $(2, \sqrt{3})$ ve $(-2, \sqrt{3})$
   c) $(2, -\sqrt{3})$ ve $(-2, \sqrt{3})$
   d) $(2, \sqrt{3})$ ve $(2, -\sqrt{3})$
   e) $(2, \sqrt{3})$ ve $(3, \sqrt{3})$

5. x ürün miktarı olmak üzere, bir ürün için toplam kâr fonksiyonu $P(x) = -5x^2 + 20x + 34$ olarak verilsin. Buna göre maksimum kârı sağlayan ürün miktarı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 1
   b) 4
   c) 3
   d) 5
   e) 2

6. x ürün miktarı olmak üzere, bir ürün için toplam maliyet fonksiyonu $C(x) = 5x^2 - 20x + 34$ olarak verilsin. Buna göre maliyetin en az olduğu ürün miktarı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5
   e) 10

7. x ürün miktarı olmak üzere, bir ürün için kâr fonksiyonu olarak $P(x) = -x^2 + 100x$ verilsin. Buna göre bu üründen elde edilecek maksimum kâr aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 2000
   b) 3000
   c) 2500
   d) 3500
   e) 3200

8. x ürün miktarı olmak üzere, bir ürün için toplam gelir fonksiyonu $R(x) = 30x - \frac{x^2}{60}$ şeklinde verilsin. Bu durumda en fazla gelirin olduğu ürün miktarı aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 950
   b) 900
   c) 875
   d) 850
   e) 800

9. Bir reklam acentesi için kâr fonksiyonu, x reklam miktarını göstermek üzere, $P(x) = 230 + 20x - \frac{x^2}{2}$ olarak belirlenmiştir. Maksimum kârı veren reklam miktarını aşağıdakilerden hangisidir?
   a) 20
   b) 30
   c) 25
   d) 35
   e) 25

10. Bir çiftçinin, bir kenarı nehre sınırı olan bir mera alanının etrafını çevirmek için 2000 metrelik bir çit malzemesi bulunmaktadır. Bu malzeme ile nehre sınırı olan kısmı hariç maksimum alanlı bir dikdörtgen bölge çevirmek istiyor. Bu bölgenin alanı kaç metre kare olmalıdır?
    a) 550000
    b) 500000
    c) 400000
    d) 5000
    e) 500

Cevap Anahtarı

1.c, 2.b, 3.c, 4.d, 5.e, 6.a, 7.c, 8.b,9.a,10.b.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

[1] Türkay,M., (2013), *Optimizasyon Modelleri ve Çözüm Metodları* , 10.06.2018 tarihinde Koç Üniversitesi: http: //home.ku.edu.tr/~mturkay /indr501/ Optimizasyon.pdf internet adresinden alındı.

[2] Sabuncuoğlu, A., (2017), *Genel Matematik (İşletme, İktisat, Yaşam Bilimleri ve Sosyal Bilimler için)*, İstanbul, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

[3] Kadıoğlu, E. ve Kamali M., (2013), *Genel Matematik*, Erzurum , Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.

[4] Winston, W.L., (2003), *Operations Research: Applications and Algorithms*, 4. Baskı, Belmont, CA, International Thomson Publishing.

[5] Tsishchanka,K., (2010), *Optimization Problems*, 12.06.2018 tarihinde, New York Universty: https://cims.nyu.edu/~kiryl/Calculus/Section_4.5--Optimization%20Problems/Optimization_Problems.pdf internet adresinden alındı.